

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

---

Scuola di Scienze  
Dipartimento di Fisica e Astronomia  
Corso di Laurea Magistrale in Astrofisica e Cosmologia

## Buchi neri primordiali dalle bolle di vuoto

Presentata da:  
Stefano Bianchini

Relatore:  
Chiar.mo Prof.  
Roberto Balbinot

Anno Accademico 2017/2018

*"...Mi sembra di essere soltanto  
un bambino che gioca sulla spiaggia,  
e di essermi divertito a trovare  
ogni tanto un sasso o una conchiglia più bella  
del solito, mentre l'oceano della verità  
giaceva insondato davanti a me."*

*Sir Isaac Newton  
Dedicato a tutti coloro  
che mi vogliono bene.*

# Indice

<b>Introduzione</b>	<b>5</b>
<b>1 Materia Oscura</b>	<b>7</b>
1.1 Evidenze osservative . . . . .	7
1.2 Composizione della materia oscura . . . . .	10
1.3 Classificazione della materia oscura . . . . .	11
1.4 Rilevazione della particelle di materia oscura . . . . .	12
<b>2 Buchi neri e materia oscura</b>	<b>14</b>
2.1 Formazione dei PBH . . . . .	15
2.2 Frazione di collasso . . . . .	15
2.3 Funzione di massa estesa e monocromatica . . . . .	16
2.4 Modelli specifici . . . . .	17
2.4.1 Inflazione running-mass . . . . .	17
2.4.2 Inflazione assione-curvatore . . . . .	18
2.4.3 Funzioni di massa invarianti per scala . . . . .	20
2.5 Funzione di massa estesa: criticità, non gaussianità e non sfericità . . . . .	21
<b>3 Osservazione dei Buchi Neri Primordiali</b>	<b>24</b>
3.1 Buchi neri primordiali evaporati . . . . .	25
3.2 Lensing gravitazionale . . . . .	25
3.3 Vincoli dinamici . . . . .	27
3.4 Distruzione di binarie negli aloni galattici . . . . .	28
3.5 Riscaldamento del disco . . . . .	30
3.6 Vincoli di accrescimento . . . . .	30
3.7 Segnali X e radio dai PBH presenti . . . . .	31
3.8 Vincoli delle strutture su grande scala . . . . .	31
3.9 Vincoli indiretti . . . . .	33
3.10 Onde gravitazionali . . . . .	35
3.10.1 Formazione di sistemi binari di PBH . . . . .	35
3.10.2 Tasso di merger dei sistemi binari di PBH . . . . .	38

3.10.3	Vincoli sull'abbondanza di PBH dall'osservazione di onde gravitazionali . . . . .	41
<b>4</b>	<b>Elementi di Relatività Generale</b>	<b>43</b>
4.1	Principi della Relatività Generale . . . . .	43
4.2	Il formalismo della Relatività Generale . . . . .	45
4.3	Derivata covariante . . . . .	47
4.4	Tensore di Riemann e tensore energia-impulso . . . . .	48
4.5	Equazione di campo di Einstein . . . . .	50
<b>5</b>	<b>La Soluzione di Schwarzschild e le sue estensioni analitiche</b>	<b>51</b>
5.1	Derivazione . . . . .	51
5.2	Diagrammi spazio-temporali e buchi neri . . . . .	55
5.3	Wormhole . . . . .	62
<b>6</b>	<b>La soluzione di de-Sitter</b>	<b>64</b>
6.1	La metrica Robertson Walker . . . . .	64
6.2	Dinamica dell'universo . . . . .	67
6.3	Il modello di de Sitter . . . . .	68
6.4	Soluzione di de Sitter . . . . .	69
<b>7</b>	<b>Diagrammi di Penrose</b>	<b>77</b>
7.1	Diagramma di Penrose per lo spazio-tempo di Minkowski . . . . .	77
7.2	Diagramma di Penrose per la soluzione di Kruskal . . . . .	81
7.3	Diagramma di Penrose per la soluzione di de Sitter . . . . .	83
<b>8</b>	<b>Shell de Sitter-Schwarzschild</b>	<b>87</b>
8.1	Condizioni di giunzione . . . . .	88
8.2	Equazione del moto della parete . . . . .	91
<b>9</b>	<b>Formazione di buchi neri</b>	<b>94</b>
9.1	Soluzione dell'equazione del moto della parete . . . . .	94
9.2	Commento alle possibili soluzioni . . . . .	98
<b>10</b>	<b>Formalismi Misner-Sharp e Hernandez-Misner</b>	<b>106</b>
10.1	Formalismo Misner-Sharp . . . . .	106
10.2	Applicazioni cosmologiche del formalismo Misner-Sharp . . . . .	110
10.2.1	Evoluzione del background . . . . .	110
10.3	Oltre il background . . . . .	112
10.4	Formazione di buchi neri . . . . .	114
10.5	Formalismo Hernandez-Misner . . . . .	114
10.6	Estrazione della massa . . . . .	118

<b>11 Conclusioni</b>	<b>121</b>
<b>A Condizioni di giunzione</b>	<b>122</b>
A.1 Prima condizione di giunzione . . . . .	123
A.2 Seconda condizione di giunzione . . . . .	124
<b>Bibliografia</b>	<b>127</b>

# Introduzione

I buchi neri primordiali (PBH) sono un ipotetico tipo di buchi neri formatosi poco dopo il Big Bang nei primi istanti di vita dell'universo. Tali buchi neri, non discendendo dall'evoluzione di una stella, possono abbracciare un ampissimo intervallo di masse il quale ipoteticamente va dalla massa di Plank a milioni di masse solari. L'interesse che circonda i PBH è anche dato dal fatto che le loro caratteristiche li rendono possibili candidati alla spiegazione della materia oscura come verrà discusso nella tesi. Tali oggetti hanno recentemente richiamato l'attenzione della comunità scientifica in quanto i recenti segnali delle onde gravitazionali sembrano avallare l'ipotesi dei buchi neri primordiali fornendole credibilità scientifica. Questa tesi si propone di studiare un possibile meccanismo di formazione dei buchi neri primordiali dal punto di vista teorico e di sviluppare i concetti fisici e matematici necessari a tale obiettivo, senza tuttavia trascurare gli aspetti osservativi riguardanti l'identificazione di tali oggetti astrofisici. Il primo modello proposto per la formazione dei PBH, ideato da Guth ed altri, ipotizza delle disomogenità nell'universo primordiale, tali disomogenità si traducono matematicamente in regioni diverse dello spazio-tempo (Schwarzschild e de Sitter) alcune caratterizzate dal vuoto ed altre dal falso vuoto, le regioni rimangono separate per mezzo di una parete. L'idea di base è che il falso vuoto sia instabile e possa decadere portando alla nascita di un buco nero o altre strutture. Successivamente si proporranno modelli più avanzati attualmente utilizzati nei settori della ricerca che sfruttano il calcolo numerico.

La tesi è organizzata come segue: il primo capitolo è un'introduzione al concetto di materia oscura e alle sue caratteristiche; il secondo capitolo tratta il possibile legame tra materia oscura e buchi neri; il terzo capitolo presenta una panoramica dei possibili metodi per l'osservazione dei buchi neri primordiali; il quarto capitolo introduce la Relatività Generale di Einstein ed il formalismo tensoriale il quale risulterà essere uno strumento fondamentale nei capitoli successivi; il sesto capitolo presenta la prima soluzione dell'equazione di Einstein, la soluzione di Schwarzschild; il settimo capitolo tratta una seconda soluzione dell'equazione di Einstein, la soluzione di de Sitter; il settimo capitolo introduce i diagrammi di Penrose utile strumento per comprendere le connessioni causali delle diverse regioni dello spazio-tempo; l'ottavo capitolo presenta la procedura utilizzata per collegare lo spazio-tempo di de Sitter e di Schwarzschild; nel nono capitolo si risolverà l'equazione del moto della parete che separa le due regioni di spazio-tempo

e se ne discuteranno le soluzioni; nel decimo capitolo si introducono i modelli Misner-Sharp e Hernandez-Misner per la formazione di buchi neri; le conclusioni possono essere trovate nell'undicesimo capitolo; in appendice si possono trovare i dettagli matematici del collegamento fra lo spazio di de Sitter e Schwarzschild.

# Capitolo 1

## Materia Oscura

In questo primo capitolo si tenterà di esporre cosa sia la materia oscura avvalendosi dei risultati riassunti da G. Bertone et al.<sup>[23]</sup> La materia oscura è un'ipotetica forma di materia che deve il suo nome al fatto che essa non emetterebbe radiazione elettromagnetica. Di conseguenza essa è rilevabile, ad oggi, unicamente grazie agli effetti gravitazionali che provoca. L'introduzione di tale concetto nasce dall'esigenza di conciliare i risultati teorici con diverse osservazioni di carattere astrofisico e si è stimato che la materia oscura costituisca circa l'85% di tutta la materia dell'Universo. Su cosa costituisca effettivamente la materia oscura vi è un cospicuo numero di ipotesi, più o meno accreditate. Esiste tuttavia una corrente di pensiero che avvalga l'ipotesi della non esistenza della materia oscura ma piuttosto ipotizza che per spiegare le evidenze osservative sia necessaria una modifica della teoria della Relatività Generale. In questo capitolo si esporranno brevemente le evidenze osservative della materia oscura e alcune delle sue possibili modellizzazioni.

### 1.1 Evidenze osservative

La materia oscura non è mai stata direttamente osservata, tuttavia vi sono diversi effetti osservabili che ne suggeriscono la presenza. Segue ora una breve esposizione delle principali evidenze osservative rilevate a partire dalle curve di rotazione delle galassie. Le braccia delle galassie a spirale, costituite da stelle e gas, ruotano attorno al centro galattico. La densità della massa luminosa decresce dal centro verso l'esterno. Se la massa luminosa costituisse tutta la materia si potrebbe modellizzare la galassia come una massa puntiforme centrale con altre masse che ruotano attorno similmente al sistema solare. Per la seconda legge di Keplero la velocità di rotazione decresce dal centro verso l'esterno ma questo non è osservato. A dispetto delle previsioni la curva di velocità rimane praticamente piatta al crescere della distanza dal centro. Ciò che ci si aspetterebbe è



un andamento della velocità in funzione del raggio dato da

$$v(r) = \sqrt{\frac{GM(r)}{r}} \quad (1.1)$$

dove  $M(r) \equiv 4\pi \int \rho r r^2 dr$  dove  $\rho(r)$  è il profilo di densità, il quale dovrebbe precipitare come  $1/\sqrt{r}$  oltre il disco ottico. Il fatto che  $v(r)$  abbia un profilo approssimativamente costante indica la presenza di un alone per cui  $M(r) \propto r$  e dunque  $\rho(r) \propto 1/r^2$ . Un tipico esempio della curva di rotazione di una galassia è osservabile in *Fig 1.1* La presen-

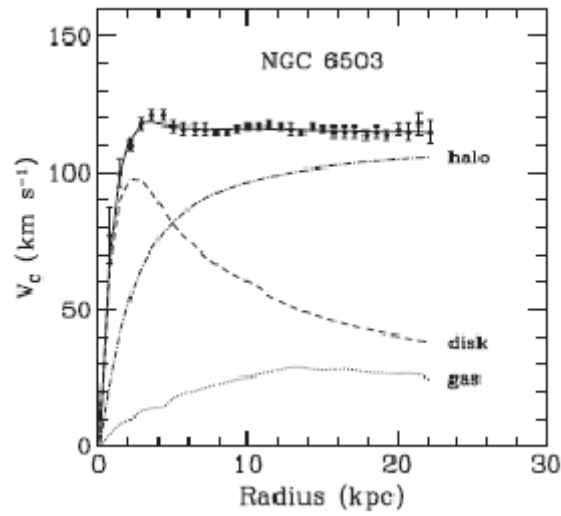


Figura 1.1: Tipica curva di rotazione di una galassia a spirale. Nella figura è possibile osservare i contributi del gas, del disco e dell'alone

za dell'alone di materia invisibile è interpretata come un'evidenza della materia oscura. Alle curve di rotazione si accostano altri effetti sulle velocità che non possono essere spiegati calcolando gli effetti della sola materia osservabile. Le stelle nei sistemi legati devono rispettare il teorema del viriale. Tale teorema, unito alla misura della dispersione di velocità, permette di calcolare la massa di un sistema legato come ad esempio una galassia ellittica. La velocità di dispersione prevista dalla teoria non si accorda con quella misurata. Ancora una volta si può creare accordo fra previsioni ed osservazioni introducendo una forma di materia non luminosa. Un altro modo per evidenziare la presenza di materia oscura è il calcolo del rapporto tra la massa gravitazionale, che partecipa all'interazione gravitazionale fra i corpi, e la massa luminosa, ossia la parte di massa che emette radiazione. Per l'utilizzo di tale metodo gli ammassi galattici sono uno strumento fondamentale in quanto la loro massa può essere stimata in tre diversi modi indipendenti. La stima della massa può derivare dalla dispersione di velocità radiali delle galassie interne all'ammasso. A partire dallo spettro X, emesso dal gas caldo

dell'ammasso, è possibile stimare la temperatura e la densità del gas. Nota quindi la pressione ed assumendo l'equilibrio fra pressione e gravità è possibile calcolare la massa dell'ammasso. Il lensing gravitazionale inoltre permette la stima della massa degli ammassi senza basarsi su informazioni dinamiche. In generale questi tre metodi concordano nell'affermare che il rapporto fra materia oscura e materia visibile è di cinque ad uno. Un' ulteriore evidenza della materia oscura è presentata dallo studio della radiazione cosmica di fondo (CMB) in quanto la materia oscura, a differenza della materia ordinaria, non interagisce direttamente con la radiazione ma può interagire con la CMB mediante il proprio potenziale gravitazionale e grazie agli effetti che provoca su densità e velocità della materia ordinaria. La CMB approssima molto bene l'emissione di un corpo nero tuttavia contiene piccolissime anisotropie di temperatura. La mappa delle anisotropie può essere scomposta in uno spettro di potenza angolare contenente diversi picchi di diverse altezze. Le fluttuazioni di temperatura possono essere scritte come serie di Fourier-Legendre:

$$\delta_T(\theta, \phi) = \sum_{l=0}^{+\infty} \sum_{m=-l}^l a_{l,m} Y_{l,m}(\theta, \phi) \quad (1.2)$$

dove  $Y_{l,m}(\theta, \phi)$  sono le armoniche sferiche

$$Y_{l,m}(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-m)!}{(l+m)!}} P_l^m(\cos\theta) e^{i\phi} \quad (1.3)$$

dove  $P_l^m$  sono i polinomi di Legendre. L'osservabile più importante della CMB è lo spettro di potenza anche detto spettro angolare delle fluttuazioni di temperatura

$$C(l) = \langle a_{l,m}^2 \rangle = \frac{\sum_{m=-l}^l a_{l,m}^2}{2l+1} \quad (1.4)$$

La serie di picchi può essere prevista in funzione del modello cosmologico adottato. Lo spettro di potenza angolare osservato fornisce una potente evidenza della materia oscura in quanto si accorda molto bene con il modello Lambda-CDM (un modello che prevede la presenza di materia oscura) ed è difficilmente riproducibile da modelli concorrenti. Infine vi è un' ultima importante evidenza della presenza di materia oscura: la formazione di strutture su larga scala. La formazione delle strutture è il processo per il quale, a seguito del Big Bang, le perturbazioni di densità sono collassate formando stelle e galassie. La materia ordinaria è influenzata dalla radiazione la quale era la componente dominante dell'universo primordiale. Se la materia ordinaria fosse l'unica esistente non si sarebbero potute formare le strutture complesse che si osservano nell'universo. La materia ordinaria è stata guidata nel suo collasso da buche di potenziale gravitazionali causate dal collasso della materia oscura avvenuto precedentemente. Mentre la radiazione ha impedito a lungo il collasso della materia ordinaria a causa della sua pressione, la materia oscura si era già disaccoppiata dalla radiazione ed ha potuto collassare in modo da poter poi guidare il collasso della materia ordinaria.

## 1.2 Composizione della materia oscura

Viste le evidenze della presenza di materia oscura sorge spontaneo domandarsi da cosa essa sia costituita. Un primo tentativo di spiegare il deficit di massa è ipotizzare che sia costituita da materia barionica non rilevata. La materia barionica può comprendere le stelle, i pianeti, buchi neri, gas interstellare, le stelle di neutroni e le nane brune i quali vengono raggruppati nella categoria MACHO (Massive Compact Halo Object) e possono essere difficili da rilevare. Nonostante ciò appare poco probabile che la materia oscura sia costituita da materia barionica. Innanzitutto la materia oscura è molto diffusa e se fosse costituita da polveri o gas di natura barionica risulterebbe visibile qualora venisse illuminata dalle stelle circostanti. A seguire la nucleosintesi del Big Bang predice correttamente le abbondanze chimiche osservate. Se esistesse più materia barionica di quella osservata allora sicuramente si dovrebbero avere più elio, litio e metalli pesanti sintetizzati durante il Big Bang. Inoltre le ricerche di microlensing effettuate nella Via Lattea mostrano che solo una piccola frazione della materia oscura può essere costituita da oggetti compatti convenzionali (MACHO). Infine gli studi sulla CMB mostrano che circa i cinque sesti della materia totale si trova in una forma che interagisce significativamente con la materia ordinaria ed i fotoni solo per via gravitazionale. Accanto alla materia oscura barionica si affacciano ulteriori candidati costituiti da quella che viene definita materia esotica ossia costituita da particelle ancora non osservate e che non rientrano nel modello standard. I candidati non barionici per la materia oscura sono particelle ipotetiche quali assioni, neutrini sterili, Weakly Interactive Massive Particles (WIMPs), Gravitationally Interactive Massive Particles (GIMPs) o particelle supersimmetriche. Le tre tipologie di neutrino sono una componente della materia abbondante e non facilmente rilevabile tuttavia sono eccessivamente leggeri e possono sopprimere al massimo ad una piccola frazione della materia oscura. A differenza della materia barionica la materia non barionica non partecipa alla formazione di elementi durante la nucleosintesi primordiale, di conseguenza essa può essere rilevata solo attraverso i suoi effetti gravitazionali. In più, se essa è costituita da particelle supersimmetriche, tali particelle possono annichilirsi con se stesse producendo raggi gamma e neutrini osservabili. E' anche stato ipotizzato che si formino strutture composte unicamente di materia oscura tuttavia l'aggregarsi di materia oscura in oggetti compatti pare poco probabile per due principali ragioni. Innanzitutto la materia oscura non dispone di un mezzo efficiente per perdere energia, nel cadere in una buca di potenziale la materia oscura non potendo perdere energia acquisirebbe velocità sufficiente per sfuggire all'aggregato. Inoltre la materia barionica nel suo aggregarsi presenta una moltitudine di diverse interazioni, ad esempio le strutture stellari si aggregano per gravità ma l'equilibrio è raggiunto grazie ai processi nucleari che avvengono all'interno della struttura. La materia oscura pare interagire solo gravitazionalmente e non gode di altre interazioni fondamentali nella costituzione di strutture complesse. Nonostante ciò la questione è attualmente dibattuta.

### 1.3 Classificazione della materia oscura

La materia oscura può essere suddivisa in due tipologie: la materia oscura calda (HDM) e la materia oscura fredda (CDM). Per comprendere tale distinzione è bene introdurre due tempi scala: l'epoca di de-relativizzazione  $a_{\text{nr}}$  che è l'istante di tempo in cui la velocità delle particelle di materia oscura diviene non-relativistica e l'epoca del disaccoppiamento della materia oscura dal fluido cosmologico  $a_{\text{dx}}$ , ossia l'istante di tempo a partire dal quale la materia oscura può interagire con le altre componenti dell'universo solamente mediante l'interazione gravitazionale. Tali istanti sono espressi in funzione del fattore di scala  $a$  degli universi di Friedmann i quali verranno meglio formalizzati in seguito, per il momento basti sapere che esso rappresenta il fattore di espansione dell'universo e che è funzione del tempo. L'istante di de-relativizzazione è ottenibile eguagliando l'energia termica con l'energia a riposo delle particelle

$$k_{\text{B}}T(a_{\text{nr}}) = m_{\text{x}}c^2 \quad (1.5)$$

Dove  $T(a_{\text{nr}})$  è la temperatura di de-relativizzazione di particelle di materia oscura di massa  $m_{\text{x}}$ . Quando  $T > T(a_{\text{nr}})$  le particelle risultano relativistiche. Nel modello attuale del Big-Bang la temperatura è una funzione decrescente nel tempo, ossia l'universo, a partire dall'istante iniziale, si sta raffreddando. Dall'equazione (1.4) si evince dunque che le particelle più massive tendono ad uscire prima dalla fase relativistica. Se  $a_{\text{dx}} < a_{\text{nr}}$  allora la massa  $m_{\text{x}}$  dev'essere sufficientemente piccola, si parla dunque di materia oscura calda il cui miglior candidato attualmente è il neutrino. Se invece si verifica  $a_{\text{dx}} > a_{\text{nr}}$  allora la massa delle particelle è maggiore e si parla di materia oscura fredda di cui esistono numerosi candidati, come ad esempio i WIMPs. E' inoltre possibile ricavare l'andamento della massa di Jeans, ossia la massa critica del collasso gravitazionale, in funzione dell'epoca per le due tipologie di materia oscura. Tali andamenti sono riportati in (*Fig (1.2)*) dove  $a_{\text{eq}}$  indica l'epoca in cui la frazione di materia e radiazione si equivalgono. Gli andamenti mostrati nei grafi

ci permettono inoltre di stabilire, alle diverse epoche, quale sia la massa minima che una perturbazione deve avere per poter crescere, come si vede infatti tale possibilità è funzione del tempo. E' interessante notare che esiste un valore massimo della massa di Jeans per entrambe le tipologie di materia oscura, tutte le perturbazioni di massa superiore a tale valore sono libere di crescere per tutta la durata dell'universo. Tale valore corrisponde alla massa di Jeans all'equivalenza e dipende dal candidato di materia oscura scelto. Nel caso della HDM poichè l'ipotesi più accreditata è quella del neutrino massivo si giunge ad una massa di Jeans  $M_{\text{J}} \sim 10^{16} M_{\odot}$  il quale è un valore più grande della massa di qualsiasi oggetto osservabile nell'universo. Per quanto riguarda la CDM, assumendo i WIMPs come candidati, si giunge a  $M_{\text{J}} \sim 10^{5-6} M_{\odot}$ , valore più verosimile, tale massa corrisponde all'incirca alla massa degli ammassi globulari. In basa alla tipologia di materia oscura si distinguono due scenari di formazione delle strutture differenti. Per la HDM lo scenario previsto è di tipo Top-Down, tutte le strutture con massa minore della

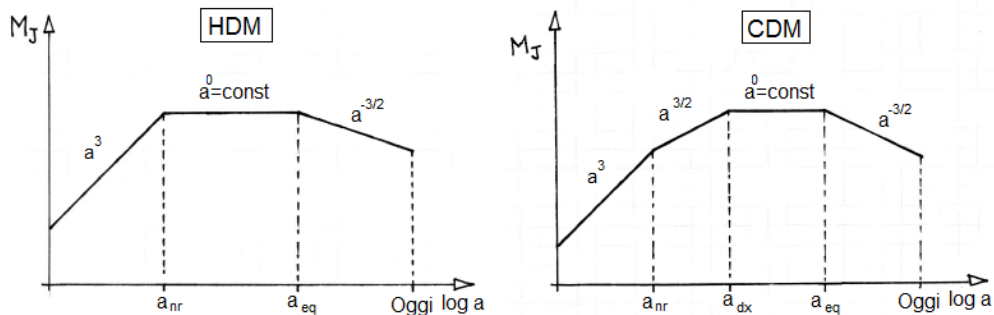


Figura 1.2: Massa di Jeans per HDM (a sinistra) e CDM (a destra) a cavallo di varie epoche cosmologiche

massa di Jeans si formerebbero per frammentazione di strutture più grandi. Viceversa per la CDM lo scenario è di tipo Bottom-Up, ossia per prime si formano le strutture più piccole e poi, per aggregazione, le più grandi.

## 1.4 Rilevazione della particelle di materia oscura

Nell'eventualità che la materia oscura sia costituita da particelle sub-atomiche allora miliardi di tali particelle attraversano in continuazione ogni centimetro quadrato della Terra. Numerosi esperimenti sono volti a testare quest'ipotesi. Gli esperimenti si dividono in due categorie: le esperienze dirette mirano a rilevare lo scattering della materia oscura, le esperienze indirette invece tentano di rilevare i prodotti del decadimento o annichilazione della materia oscura

Le rilevazioni dirette hanno lo scopo di osservare il rinculo dei nuclei dovuto all'interazione con le particelle di materia oscura che attraversano, almeno in teoria, la terra. A seguito del rinculo le particelle emetteranno energia, sotto forma di luce di scintillazione o fononi, che può essere rilevata da appositi rilevatori. Al fine di eseguire misure efficaci è necessario lavorare in condizioni di basso rumore di fondo di conseguenza i laboratori vengono situati sotto terra al fine di minimizzare il rumore prodotto dai raggi cosmici. Prevalentemente gli esperimenti per la rilevazione diretta della materia oscura sfruttano tecnologie di detector criogenici o a liquidi nobili. I detector criogenici lavorano a temperature di circa  $100mK$  e rilevano il calore prodotto da una particella che collide con un atomo dell'assorbitore (tipicamente il germanio). I detector a liquidi nobili rilevano la scintillazione provocata dalla collisione di particelle con lo Xenon (o Argon) liquido. Entrambe le tecniche si focalizzano sulla capacità del rilevatore di distinguere le particelle di materia oscura da quelle di background. Ad oggi nessun esperimento ha

fornito evidenze della materia oscura il che pone dei forti limiti superiori alla massa ed alla sezione d'urto di tali particelle.

Gli esperimenti per la rilevazione indiretta cercano i prodotti dell'annichilazione delle particelle di materia oscura nello spazio. Per esempio, in regioni ad alta concentrazione di materia oscura, due particelle di materia oscura possono annichilirsi e produrre raggi gamma o coppie particella anti-particella del modello standard. Alternativamente, nel caso le particelle di materia oscura siano instabili esse potrebbero decadere in particelle del modello standard o altre. Tali processi possono essere rilevati indirettamente dall'osservazione di eccessi di raggi gamma, antiprotoni o positroni in regioni ad alta densità di materia oscura come ad esempio il centro della nostra galassia. La difficoltà in tale ricerca è che numerose sorgenti astrofisiche possono produrre segnali molto simili a quelli attesi per la materia oscura. E' possibile che una parte della materia oscura che attraversa il Sole o la Terra interagisce con gli atomi che incontra e perde energia provocando un accumulo di materia oscura al centro di tali corpi ed aumentando le probabilità di annichilimento. Tale fenomeno produrrebbe un particolare segnale nella forma di neutrini altamente energetici e fornirebbe una solida prova indiretta della materia oscura. Un approccio alternativo alla rilevazione di materia oscura è quello di produrla in laboratorio. Gli esperimenti al Large Hadron Collider potrebbero essere in grado di rilevare la materia oscura nelle collisioni fra i fasci protonici. Data l'estrema debolezza di interazione della materia oscura con la materia ordinaria la sua rilevazione sarebbe indiretta e consisterebbe in un significativo quantitativo di energia mancante nei prodotti della collisione. E' importante sottolineare come qualsiasi scoperta proveniente da un acceleratore necessita di corroborazione da parte delle prove dirette ed indirette in modo da mostrare che le particelle rilevate costituiscano veramente la materia oscura del nostro Universo.

## Capitolo 2

# Buchi neri e materia oscura

In questo capitolo si introduce brevemente il processo di formazione dei buchi neri primordiali ed il loro legame con la materia oscura seguendo il percorso proposto da B. Carr<sup>[9]</sup> La possibilità che la materia oscura sia costituita dai buchi neri primordiali (PBH) viene considerata con particolare enfasi nelle seguenti finestre di massa:  $10^{16} - 10^{17} g$ ,  $10^{20} - 10^{24} g$  e  $1 - 10^3 M_\odot$ . Nonostante non siano mai stati rilevati i PBH catturano l'interesse dei fisici da decenni. La ragione dell'interesse è dovuta al fatto che solo i PBH possono essere sufficientemente piccoli da emettere una quantità significativa di radiazione di Hawking la quale, nonostante non sia mai stata rilevata, unifica relatività generale, meccanica quantistica e termodinamica. I PBH di massa inferiore a  $10^{15} g$  sono già evaporati con molte interessanti conseguenze cosmologiche come ad esempio la possibile spiegazione del background gamma e la reionizzazione dell'Universo pre-galattico. Anche PBH di massa superiore a  $10^{15} g$  sono oggetto di interesse in quanto essi potrebbero fornire il seme per i buchi neri supermassicci nei nuclei galattici, la generazione di strutture su larga scala attraverso fluttuazioni Poissoniane ed importanti effetti sulla storia termica dell'Universo. La prospettiva più interessante tuttavia è che i PBH costituiscano la materia oscura. Essendosi formati nell'era radiativa essi non subiscono i vincoli della nucleosintesi primordiale che limita i barioni a non superare il 5% della massa critica. Essi non possono essere considerati dunque materia barionica e, dal punto di vista dinamico, si comportano come altre forme di materia oscura fredda (CDM). Ancora non vi è nessuna evidenza che i PBH costituiscano la materia oscura tuttavia neppure i candidati più tradizionali godono di verifiche sperimentali. Infatti né gli assioni né le particelle massive debolmente interagenti (WIMPs) sono mai stati identificati nelle ricerche della materia oscura degli acceleratori. Negli anni novanta i risultati di microlensing di MACHO (Massive Astrophysical Compact Halo Object) suggerirono che la materia oscura potesse essere costituita da oggetti compatti di massa  $0.5 M_\odot$  il che parve sostenere che PBH potessero costituire la materia oscura poichè essi sono oggetti dotati delle caratteristiche necessarie (interagiscono solo per via gravitazionale e non elettromagnetica). I PBH si formano naturalmente durante la transizione quark-adroni a  $10^{-5} s$  dopo il

Big-Bang. In seguito però si dimostrò che tali oggetti potevano costituire solo il 20% della materia oscura, di conseguenza è necessario prendere in considerazione altri range di massa più ampi e domandarsi se possibile che essi costituiscano la materia oscura ed in quale percentuale.

## 2.1 Formazione dei PBH

I PBH si formano nell'Universo primordiale a seguito di diversi meccanismi, i quali prevedono tutti un legame fra la massa ed il tempo  $t$  dopo il Big-Bang.

$$M \approx \frac{c^3 t}{G} \approx 10^{15} \left( \frac{t}{10^{-23} s} \right) g \quad (2.1)$$

Il che significa che i PBH possono presentarsi su un ampio range di masse. L'elevata densità di energia presente nell'Universo primordiale è condizione necessaria ma non sufficiente alla formazione dei PBH. Una delle possibilità è che esistessero delle disomogeneità primordiali, i che ha permesso alle regioni sovradense di arrestare l'espansione e ricollassare. In tale contesto l'equazione (2.1) può essere rimpiazzata da una relazione più precisa

$$M = \gamma M_{\text{PBH}} \approx 2.03 \cdot 10^5 \gamma \left( \frac{t}{1s} \right) \quad (2.2)$$

Dove  $\gamma$  è un fattore numerico che dipende dai dettagli del collasso gravitazionale. Diversi calcoli di idrodinamica attestano il suo valore attuale a circa 0.4. Su come risultino le perturbazioni non vi è accordo.

## 2.2 Frazione di collasso

La frazione di massa dell'Universo contenuta nei PBH è funzione del tempo ma il suo valore all'epoca di formazione dei PBH è espresso da  $\beta(M)$ . Il corrente parametro di densità  $\Omega_{\text{PBH}}$  in funzione del redshift (o del tempo ) è dato da

$$\Omega_{\text{PBH}} \simeq \beta \Omega_r (1+z) \sim 10^6 \beta \left( \frac{t}{1s} \right)^{-\frac{1}{2}} \sim 10^{18} \beta \left( \frac{M}{10^{15} g} \right)^{-\frac{1}{2}} \quad (M > 10^{15} g) \quad (2.3)$$

dove  $\Omega_r$  è il parametro di densità associato alla radiazione cosmica di fondo. E' possibile determinare la relazione (2.3) con più precisione per il modello standard  $\Lambda_{\text{CDM}}$  in cui l'età dell'Universo è  $t_0 = 13.8 \text{ Gyr}$ , il parametro di Hubble  $h = 0.68$  e il tempo di disaccoppiamento  $t_{\text{dec}} = 380 \text{ Kyr}$ . Se i PBH hanno una funzione di massa monocromatica, allora la frazione di massa dell'Universo nei PBH al tempo di formazione  $t_i$  è relazionata



alla densità numerica al tempo  $t_i$  ed al tempo  $t_0$  da

$$\beta(M) \equiv \frac{M n_{\text{PBH}}(t_i)}{\rho(t_i)} \approx 7.98 \cdot 10^{-29} \gamma^{-\frac{1}{2}} \left( \frac{g_{*i}}{196.75} \right)^{\frac{1}{4}} \left( \frac{M}{M_\odot} \right)^{\frac{3}{2}} \left( \frac{n_{\text{PBH}}(t_0)}{1 \text{ Gpc}^{-3}} \right), \quad (2.4)$$

dove  $g_{*i}$  è il numero di gradi di libertà della formazione dei PBH. Il parametro di densità attuale dei PBH ancora non evaporati è dato da

$$\Omega_{\text{PBH}} = \frac{M n_{\text{PBH}}}{\rho_{\text{crit}}} \approx \left( \frac{\beta(M)}{1.03 \cdot 10^{-8}} \right) \left( \frac{h}{0.68} \right)^{-2} \gamma^{\frac{1}{2}} \left( \frac{g_{*i}}{106.75} \right)^{-\frac{1}{4}} \left( \frac{M}{M_\odot} \right)^{-\frac{1}{2}} \quad (2.5)$$

la quale è una forma più precisa dell'equazione (3). Poichè  $\beta$  appare sempre in combinazione con  $g_{*i}^{-\frac{1}{4}} \gamma^{\frac{1}{2}} h^{-2}$  è possibile definire il parametro

$$\beta'(M) \equiv \gamma^{-\frac{1}{2}} \left( \frac{g_{*i}}{106.75} \right) \left( \frac{h}{0.68} \right) \beta(M) \quad (2.6)$$

Un limite a  $\beta'(M)$  viene dal limite del parametro di densità della CDM,  $\Omega h^2 = 0.110 \pm 0.006$  con  $h = 0.72$ , in tal modo il limite a  $3\sigma$  è  $\Omega_{\text{PBH}} < \Omega_{\text{CDM}} < 0.25$ . Il che implica

$$\beta'(M) < 2.04 \cdot 10^{-18} \left( \frac{\Omega_{\text{CDM}}}{0.25} \right) \left( \frac{M}{10^5 g} \right)^{\frac{1}{2}} \quad M > 10^5 g \quad (2.7)$$

Tuttavia tale relazione dev'essere modificata nell'eventualità che l'Universo devii dal comportamento standard dominato dalla radiazione. La relazione potrebbe dover essere modificata anche nell'eventualità che vi sia un secondo periodo inflazionario, un periodo in cui varia la costante gravitazionale o anche in presenza di dimensioni extra. Ogni modello di formazione dei PBH dev'essere poi confrontato con dei vincoli nel range di massa dove la funzione di massa prevista dal modello ha il picco massimo. Tali vincoli saranno meglio esposti in seguito, in generale essi sono espressi come rapporto tra l'attuale densità di massa dei PBH e la densità della materia oscura fredda:

$$f(M) \equiv \frac{\Omega_{\text{PBH}}}{\Omega_{\text{CDM}}} \simeq 4.8 \Omega_{\text{PBH}} = 4.11 \cdot 10^8 \beta'(M) \left( \frac{M}{M_\odot} \right)^{-\frac{1}{2}} \quad (2.8)$$

## 2.3 Funzione di massa estesa e monocromatica

Per quanto riguarda la rappresentazione dei vincoli per la funzione di massa estesa, un approccio è quello di integrare la funzione di massa differenziale su di un intervallo di ampiezza  $M$  per ogni  $M$ , data la funzione continua

$$n(M) = M \frac{dn}{dM} = \frac{dn}{d \ln M} \quad (2.9)$$

Qui  $n(M)$  può essere interpretata come la densità numerica dei PBH in un range di massa  $(M, 2M)$ . Si possono dunque definire le quantità

$$\rho(M) = M^2 \frac{dn}{dM}, \quad f(M) = \frac{\rho(M)}{\rho_{\text{CDM}}}, \quad (2.10)$$

che corrisponde alla densità di massa e alla frazione di materia oscura, rispettivamente, nel medesimo range di massa. Ciò è equivalente a dividere la massa in parti ed ha il vantaggio di rendere immediatamente visibile dove si trova il grosso della massa. Se la funzione di massa attesa è nota, è possibile inserire  $n(M)$ , o  $\rho(M)$ , e confrontarli con i vincoli nel medesimo grafico. Il caso monocromatico è generalmente più complicato, sebbene sia estremamente chiaro nel caso di una distribuzione di massa data da una delta di Dirac. I problemi sorgono qualora l'ampiezza della funzione si avvicini alla funzione monocromatica ( $\Delta M \ll M$ ). Sebbene uno spettro di massa monocromatico appaia poco probabile, bisognerebbe aspettarsi una funzione di massa estremamente estesa se i PBH si sono formati da fluttuazioni di densità invarianti per scala o dal collasso di stringhe cosmiche. In tal caso si avrebbe:

$$\frac{dn}{dM} \propto M^{-\frac{5}{2}}, \quad n(M) \propto M^{-\frac{3}{2}}, \quad \rho(M) \propto f(M) \propto M^{-\frac{1}{2}}, \quad \beta(M) = \text{const} \quad (2.11)$$

Ciò non è in accordo con le previsioni del modello inflazionario, ma in molte circostanze lo spettro può essere espanso tanto da avere conseguenze osservabili interessanti, poichè i vincoli su una scala di massa possono influenzare anche le scale vicine.

## 2.4 Modelli specifici

Alla luce delle rilevazioni compiute da LIGO e VIRGO i quali hanno rilevato merger di buchi neri in un range di massa  $10 M_{\odot} < M < 10^2 M_{\odot}$  si prenderanno in considerazione modelli in grado di produrre buchi neri in questo range di masse o in quelli vicini. Si esporranno i modelli di inflazione running-mass e di inflazione assione-curvatone i cui parametri possono essere regolati al fine di ottenere il picco della funzione di massa in diversi intervalli. Inoltre tali modelli sono compatibili con effetti non-Gaussiani.

### 2.4.1 Inflazione running-mass

In generale il modello inflazionario è descritto da un campo scalare, la cui particella associata è detta inflatone, tale campo è descritto dalla lagrangiana

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_{\mu} \phi(x) \partial^{\mu} \phi(x) - V[\phi(x)] \quad (2.12)$$

dove  $\phi$  è il campo scalare e  $V(\phi)$  è il potenziale inflazionario. La più semplice realizzazione di questo modello è data dal potenziale inflazionario

$$V(\phi) = V_0 + \frac{1}{2}m_\phi^2(\phi)\phi^2, \quad (2.13)$$

dove  $V_0$  è una costante. Tale modello può essere inserito all'interno di una gran varietà di possibili framework i quali conducono a differenti funzioni  $m_\phi(\phi)$ . Il che porta a diverse forme dello spettro di potenza primordiale la cui varianza può essere espressa in generale come:

$$[\sigma(k)]^2 \simeq \frac{8}{81}\mathcal{P}(k_*) \left(\frac{k}{k_*}\right)^{n(k)-1} \Gamma\left(\frac{n_s(k)+3}{2}\right), \quad (2.14)$$

dove gli indici spettrali  $n(k)$  e  $n_s(k)$  sono dati da

$$n(k) = n_s(k_*) - \frac{1}{2!}a \ln\left(\frac{k}{k_*}\right) + \frac{1}{3!}b \ln^2\left(\frac{k}{k_*}\right) - \frac{1}{4!}c \ln^3\left(\frac{k}{k_*}\right) + \dots \quad (2.15)$$

$$n_s(k) = n_s(k_*) - a \ln\left(\frac{k}{k_*}\right) + \frac{1}{2}b \ln^2\left(\frac{k}{k_*}\right) - \frac{1}{6}c \ln^3\left(\frac{k}{k_*}\right) + \dots \quad (2.16)$$

con  $a, b$  e  $c$  parametri reali. Poichè si sono misurati i valori dell'indice spettrale dello spettro di potenza primordiale alla scala di  $k_* = 0.002 Mpc^{-1}$  ed essi sono risultati rispettivamente  $n_s(k_*) \approx 0.96 < 1$  e  $\mathcal{P}(k_*) = \mathcal{O}(10^{-9})$ , si deduce che modelli privi di termini di running non possono produrre abbondanze apprezzabili di PBH. In più con la misura di  $a = 0.003 \pm 0.007 \ll 1$  si può notare come sia necessario almeno un altro termine al che si introduce  $b = 0.02 \pm 0.02$  anch'esso non sufficiente per ottenere un abbondanza sufficiente di PBH. Di conseguenza un modello soddisfacente prevede tutti e tre i parametri  $a, b$  e  $c$ .

## 2.4.2 Inflazione assione-curvatone

Il modello qui esposto è una variazione, proposta da Kasuya e Kawasaki, dell'originale. Esso prevede un curvatone che si muove all'interno di un potenziale assionico o inflatonico. In questo modello l'inflatone  $\phi$  è il modulo e il curvatone  $\chi$  è relazionato alla fase  $\theta$  di un supercampo  $\Phi$ . In pratica l'inflatone scivola su di un potenziale della forma

$$V(\phi) = \frac{1}{2}\lambda H^2 \phi^2, \quad (2.17)$$

dove  $H$  è la costante di Hubble e  $\lambda$  una costante che deriva dalla combinazione di parametri nella teoria della supergravità. A causa della sua massa l'inflatone rotola rapidamente verso il suo minimo  $\phi_{\min}$ . A questo punto il curvatone diventa ben definito

$\chi = \phi_{\min}\theta \sim f\theta$  e diviene il primo grado di libertà del supercampo. Si assume che il curvatone si muova in un potenziale axion-like simile a quello dell'inflazione naturale

$$V_\chi = \Lambda^4 \left[ 1 - \cos\left(\frac{\chi}{f}\right) \right] \simeq \frac{1}{2}m_\chi^2\chi^2, \quad (2.18)$$

dove l'ultima uguaglianza vale laddove  $\chi$  sia prossimo al suo minimo ed il curvatone abbia massa  $m_\chi = \Lambda^2/f$ . La particolare forma di tale potenziale, che mantiene la simmetria per traslazioni peculiare dell'assione, è ciò che rende il curvatone axion-like. Lo spettro di potenza originato dalla combinazione di assione e curvatone è

$$\mathcal{P}_\zeta(k) = \mathcal{P}_{\zeta,\text{inf}}(k) + \mathcal{P}_{\zeta,\text{curv}}(k) \quad (2.19)$$

Il primo termine è dominante su larga scala (per  $k$  piccoli) ed il secondo su scala ridotta. La perturbazione dell'inflatone produce uno spettro di potenza, quasi invariante per scala, con  $\mathcal{P}_{\zeta,\text{inf}}(k) \simeq 2 \cdot 10^{-9}$ , in accordo con le osservazioni della CMB. Questo contributo risulta dominante fino ad una scala  $k \sim Mpc^{-1}$ . Si definisce  $k_c$  la scala a cui i contributi dell'inflatone e del curvatone si equivalgono e  $k_f$  la scala a cui l'inflatone raggiunge il minimo  $\phi_{\min} \sim f$ , ossia quando il curvatone diviene ben definito.  $M_c$  ed  $M_f$  sono invece le masse dell'orizzonte quando le scale attraversano l'orizzonte. I PBH non possono formarsi prima dell'attraversamento di tale orizzonte perchè le perturbazioni sono troppo piccole per  $M_H > M_c$  e non esistono perturbazioni del curvatone per  $M_H > M_f$ .  $M_f$  può essere calcolato esplicitamente utilizzando i parametri della teoria

$$M_f \simeq 10^{13-12/(n_\chi-1)} \left(\frac{g_f}{100}\right)^{-\frac{1}{6}} \left(\frac{k_c}{Mpc^{-1}}\right)^{-2} \left(\frac{\mathcal{P}_{\zeta,\text{curv}}(k_f)}{2 \cdot 10^{-3}}\right)^{-2(n_\chi-1)} M_\odot \quad (2.20)$$

dove  $n_\chi$  è l'indice spettrale del curvatone e  $g_f$  è il numero di gradi di libertà radiativi alla scala  $k_f$ . I PBH non possono generarsi dalle perturbazioni di densità inflazionarie, per come esse sono state vincolate dagli studi della CMB. D'altra parte lo spettro di potenza del curvatone, nel momento in cui diviene dominante, ha sufficiente potenza per superare i vincoli della CMB e avviare la produzione di PBH. Si assume, però, che le perturbazioni del curvatone non decadano in PBH prima che l'inflatone non sia decaduto nel modello standard delle particelle. Di conseguenza i PBH possono formarsi solamente con una massa minima  $M_{\min}$  i quali verranno prodotti dopo il decadimento del curvatone. Il valore esatto del tempo di decadimento, e quello della massa corrispondente, non sono noti eppure quest'ultimo deve essere inferiore alla massa dell'orizzonte al momento della nucleosintesi primordiale ( $10^{38} g$ ) per non interferire con esso ed inferiore a  $M_f$  per avviare la produzione di PBH. E' possibile mostrare che la varianza dello spettro di potenza di densità dovuto alle perturbazioni del curvatone è

$$\sigma_\delta^2(M_H) = \frac{8}{81} \mathcal{P}_{\zeta,\text{curv}}(k_f) \left[ \left(\frac{M_f}{M_H}\right)^{(n_\chi-1)/2} \gamma\left(\frac{n_\chi-1}{2}, \frac{M_H}{M_f}\right) + E_1\left(\frac{M_H}{M_{H_0}}\right) \right] \quad (2.21)$$

per una massa nell'orizzonte  $M_H > M_{\min}$ . Per  $M_H < M_{\min}$  si assume che lo spettro di potenza del curvatone che può avviare la produzione di PBH sia nullo il che non corrisponde esattamente alla verità ma è assunta come una buona approssimazione. L'indice spettrale del curvatone è controllato dal parametro  $\lambda$ :

$$n_\chi - 1 = 3 - 3\sqrt{1 - \frac{4}{9}\lambda} \quad (2.22)$$

ponendo  $1 < \lambda < 9/4$  si ottiene uno spettro in grado di produrre PBH senza violare i vincoli della CMB. La massa minima protegge il modello dalla sovrapproduzione di PBH su piccole scale. Le funzioni  $\gamma$  ed  $E_1$  sono date da

$$\gamma(a, x) \equiv \int_0^x dt t^{a-1} e^{-t} \quad (2.23)$$

$$E_1(x) \equiv \int_x^\infty dt \frac{e^{-t}}{t} \quad (2.24)$$

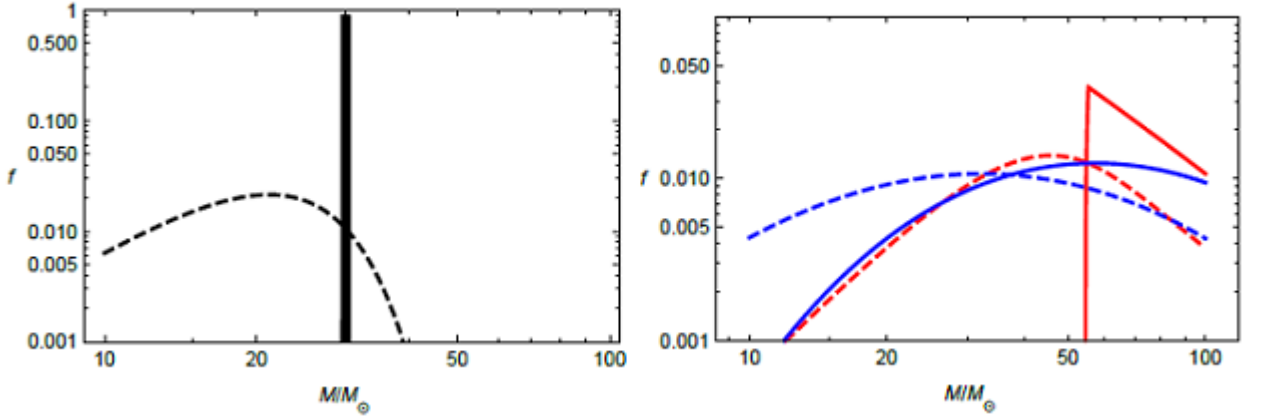


Figura 2.1: Effetti del collasso critico sulla frazione  $f$  in funzione della massa del buco nero in unità di masse solari per una funzione di massa quasi monocromatica (a sinistra), per il modello assione curvatone (rosso) e per il modello running mass (blu)(a destra). Le linee continue mostrano le abbondanze stimate di PBH per il collasso della massa dell'orizzonte, quelle tratteggiate i medesimi modelli in cui si include il collasso critico

### 2.4.3 Funzioni di massa invarianti per scala

Per una funzione di massa invariante per scala si ha che  $\Omega_{\text{PBH}}(M) \propto M^{-\frac{1}{2}}$  e dunque il contributo maggiore alla densità di materia oscura deriva dai buchi neri di piccola massa.

Di conseguenza è necessario specificare il valore di  $M_{\min}$  e verificare che il valore  $\beta(M)$  corrispondente non violi nessun vincolo dei PBH. Per  $M < 10^{15} g$  il vincolo più forte deriva dal background dei raggi  $\gamma$ :  $\beta(M)_* < 3 \cdot 10^{-27}$ . Le stringhe cosmiche producono PBH con funzione di massa invariante per scala, il cut-off inferiore viene associato alla scala di rottura della simmetria. Poichè  $\Omega(M)$  cresce al crescere di  $M$  e  $\Omega_{\text{PBH}}(10^{15} g) < 10^{-8}$  dal vincolo dei raggi  $\gamma$  tali buchi neri non possono costituire la materia oscura a meno che il limite  $M_{\min}$  non ecceda i  $10^{15} g$ , il che non pare plausibile. Tuttavia se i buchi neri evaporanti lasciassero dei relitti stabili, essi potrebbero contribuire alla materia oscura.

## 2.5 Funzione di massa estesa: criticità, non gaussianità e non sfericità

Il modello più semplice per la formazione di PBH prevede uno spettro di massa monocromatico e che essi si formino per la collisione di perturbazioni di densità sferiche aventi distribuzione gaussiana. Questo approccio, sebbene adottato in numerose pubblicazioni, è ovviamente semplicistico e può essere superato.

L'assunzione di monocromaticità è buona nell'eventualità che la dispersione di massa non sia troppa larga, il che non si sposa bene con gran parte dei modelli inflazionari che prevedono la formazione di PBH. Anche se esistono modelli che prevedono una funzione di massa stretta, quelli più realistici, che coinvolgono il collasso critico, prevedono funzioni di massa estese.

Le prime ricerche assunsero che se una sovradensità sufficientemente grande, ossia che superasse una ben determinata soglia critica, fosse rientrata nell'orizzonte questa sarebbe collassata in un PBH di massa pari a quella dell'orizzonte  $M_H$ . Assumendo la sfericità del sistema è possibile mostrare la relazione che intercorre fra la massa del PBH, quella dell'orizzonte e la sovradensità  $\delta$ .

$$M = kM_H(\delta - \delta_c)^\gamma \quad (2.25)$$

per  $\delta > \delta_c$ . La costante  $k$ , il valore di soglia  $\delta_c$  e l'esponente critico  $\gamma$  dipendono tutti dal tipo di fluido contenente la sovradensità. Dopo i primi studi circa il collasso critico questi furono applicati alla genesi dei PBH mostrando la bontà delle approssimazioni. Tuttavia le conclusioni si basano sull'assunzione di una funzione di massa monocromatica. Si è inoltre mostrato che l'utilizzo del collasso critico all'interno dei modelli inflazionari di produzione di PBH può alterare lo spettro di massa previsto di diversi ordini di grandezza. Segue l'applicazione del metodo Press-Schechter al collasso sferico. Per iniziare si assume un profilo di perturbazioni Gaussiano

$$\mathcal{P}(\delta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{\delta^2}{2\sigma^2}\right) \quad (2.26)$$

che si accorda bene con le attuali misure della CMB. La quantità  $\sigma$  è la varianza dello spettro di potenza primordiale. I modelli che prevedono un dominio radiativo mostrano che  $\gamma \simeq 0.36$  e  $\delta \simeq 0.45$  infine si pone  $k = 3.3$ . Come già menzionato, un buon metodo per stimare quanti PBH vengano prodotti è il rapporto fra la densità energetica dei PBH con quella totale all'epoca di formazione dei PBH. Usando il formalismo di Press-Schechter è possibile esprimere tale rapporto come

$$\beta = \int_{\delta_c}^{\infty} d\delta k (\delta - \delta_c)^\gamma \mathcal{P}(\delta) \approx k \sigma^{2\gamma} \text{erfc} \left( \frac{\delta_c}{\sqrt{2}\sigma} \right) \quad (2.27)$$

dove si è assunto  $\sigma \ll \delta_c$ . E' possibile inoltre derivare la funzione iniziale di massa dei PBH  $g$ . Si definisce questa come il numero di PBH  $dn_{\text{PBH}}$  per intervallo normalizzato di massa  $d\mu$ , dove  $\mu \equiv M/(kM_{\text{H}})$  in ogni orizzonte di collasso.

$$g \equiv \frac{dN_{\text{PBH}}}{d\mu} \equiv \frac{1}{\beta} \mathcal{P}(\delta[\mu]) \frac{d\delta[\mu]}{d\mu} \simeq \frac{\mu^{1/\gamma-1} \exp[-(\delta + \mu^\gamma)^2/(2\sigma^2)]}{\sqrt{2\pi}\gamma\sigma \text{erfc} \left( \frac{\delta}{\sqrt{2}\sigma} \right)} \quad (2.28)$$

Il fattore  $\beta$  è necessario al fine di normalizzare  $g$  così che  $\int g(\mu) d\mu = 1$

I suddetti risultati poggiano sull'assunzione di sfericità. L'inclusione della non sfericità è una significativa complicazione e non è stata particolarmente studiata. Ispirandosi al già noto risultato, ottenuto nell'ambito dello studio degli aloni galattici, secondo il quale la perturbazione può portare ad effetti macroscopici significativi, un simile risultato è stato ottenuto anche per i PBH. Una delle conseguenze essenziali è l'innalzarsi del valore di soglia  $\delta_{\text{ec}}$  che può essere approssimato come

$$\frac{\delta_{\text{ec}}}{\delta_c} \simeq 1 + k \left( \frac{\sigma^2}{\delta_c^2} \right)^\gamma, \quad (2.29)$$

dove  $\delta_c$  è il valore di soglia per il collasso sferico e  $\sigma^2$  l'ampiezza dello spettro di potenza ad una determinata scala. Tale risultato fu ricavato e confermato numericamente per diverse classi di modelli cosmologici, tuttavia non incluse il collasso ellittico per un modello dominato dalla radiazione, il più importante per i PBH. Successivamente fu possibile mostrare la validità dell'eq (27) per un collasso ellittico in un ambiente arbitrario. Lo schema del collasso utilizzato è il seguente: si ha dapprima il collasso lungo l'asse minore e segue quello, non lineare, lungo l'asse maggiore. Considerando delle sovradensità distribuite in modo gaussiano è possibile dimostrare che i valori attesi per la forma delle sovradensità sono

$$\langle e \rangle = \frac{3\sigma}{\sqrt{10\pi}\delta} \quad \langle p \rangle = 0, \quad (2.30)$$

dove  $e$  è l'ellitticità e  $p$  la prolazione la quale va da  $p = e$  in caso di prolazione massima a  $p = -e$  in caso di prolazione minima. Poichè il collasso ha inizio lungo l'asse minore, esso può essere confrontato con il collasso della sfera, di raggio uguale all'asse minore,

inscritto nell'ellissoide. Il volume dell'ellissoide è  $V_e = V_s(1 + 3e)/\sqrt{1 - 3e}$ . Assumendo una densità uniforme per l'ellissoide e richiedendo che il valore di soglia sia superato per la sfera si ottiene un incremento di massa pari a  $M_e = M_s V_e / V_s$ . Poichè la variazione di densità associata ad una data massa scala come  $\delta(M) \sim M^{2/3}$  nel caso dei PBH, il primo ordine del collasso ellissoidale conduce all'equazione (1.28) con  $k = 9/\sqrt{10\pi}$  e  $\gamma = 1/2$ . In casi più realistici questo risultato non è corretto e si necessita di simulazioni numeriche accurate per determinare il cambiamento del valore di soglia nel caso di un collasso relativistico non sferico. In particolare il modello appena esposto assumeva una densità uniforme dell'ellissoide laddove un profilo di densità che preveda valori superiori nelle regioni interne appare più realistico il che porta ad effetti meno pronunciati. In ogni caso l'effetto generale è l'incremento del valore di soglia ed una conseguente soppressione dello spettro di massa. La scelta della distribuzione di fluttuazioni è estremamente importante infatti poichè i PBH si formano dalle code estremamente dense dello spettro delle fluttuazioni, l'ipotesi di una distribuzione di fluttuazioni non gaussiana incide significativamente sulla loro abbondanza. Per diversi modelli è stato dimostrato che nessun troncamento del parametro di non gaussianità può essere eseguito senza modificare l'abbondanza dei PBH. La produzione di PBH attraverso un modello non gaussiano conduce a modi isocurvi che possono essere rilevati nello spettro della CMB. Gli studi effettuati mediante il satellite Planck conducono a dei vincoli dei parametri di non gaussianità:  $|f_{\text{NL}}|, |g_{\text{NL}}| < 10^{-3}$ . Per modelli come quello del curvatore o teorie di inflazioni ibride la non gaussianità esclude la possibilità che i PBH costituiscano la materia oscura in quanto ne conseguirebbero effetti di isocurvatura troppo grandi. Per essere realistici la non gaussianità dev'essere presa in considerazione quando si considera un modello per la produzione di buchi neri, se si considerano modelli inflazionari è bene ricavare immediatamente i parametri di non gaussianità e confrontarli con i suddetti vincoli. Se i limiti imposti dai vincoli sono violati allora il modello non prevede la possibilità che i PBH possano costituire materia oscura. Se il vincolo risulta soddisfatto allora si può passare a studiare i vincoli sulle abbondanza di PBH.



## Capitolo 3

# Osservazione dei Buchi Neri Primordiali

In questo capitolo, seguendo i risultati esposti da Sasaki et al.<sup>[7]</sup>, si valutano le possibilità osservative dei buchi neri primordiali, spaziando dallo spettro elettromagnetico fino alle onde gravitazionali le quali costituiscono un nuovo, promettente strumento, per l'osservazione astrofisica. In funzione della loro massa i buchi neri primordiali forniscono diversi segnali osservabili. I buchi neri aventi una massa inferiore ad un certo valore critico

$$M_c \simeq \left( \frac{3\hbar c^4 \alpha_0 t_0}{G^2} \right)^{\frac{1}{3}} \sim 10^{15} g \left( \frac{\alpha_0}{4 \cdot 10^{-4}} \right)^{\frac{1}{3}} \left( \frac{t_0}{13.8 \text{ Gyr}} \right)^{\frac{1}{3}} \quad (3.1)$$

sono già evaporati a causa della radiazione di Hawking, la quale prevede un irraggiamento di tipo termico con una temperatura

$$T = \frac{\hbar c^3}{8\pi G M k} \approx 10^{-7} \left( \frac{M}{M_\odot} \right) K \quad (3.2)$$

Il che porta ad un' evaporazione della struttura in un temposcala

$$\tau(M) \approx \frac{\hbar c^4}{G^2 M^3} \approx 10^{64} \left( \frac{M}{M_\odot} \right)^3 y \quad (3.3)$$

Nonostante ciò hanno lasciato delle tracce che possono aiutare a valutare il numero di buchi neri primordiali del giovane Universo. I buchi neri di massa superiore al valore critico invece sono tuttora presenti e forniscono segnali dovuti al lensing gravitazionale, all'accrescimento, ed effetti dinamici sulla materia barionica. Grazie a diversi tipi di osservazioni è stato possibile negli anni porre dei limiti all'abbondanza di buchi neri primordiali in diversi range di massa. A tali segnali si è recentemente aggiunta la possibilità di studiare i buchi neri attraverso le onde gravitazionali da loro emesse, il che costituisce un nuovo e promettente strumento di ricerca. Per diversi range di massa è possibile

ottenere vincoli per la frazione di buchi neri rispetto alla quantità di materia oscura:  $f_{\text{PBH}} \equiv \frac{\Omega_{\text{PBS}}}{\Omega_{\text{DM}}}$ . I vincoli possono derivare da osservazioni dirette di effetti generati dalla gravità del buco nero come il lensing gravitazionale, l'accrescimento, gli effetti dinamici e la formazione di strutture su larga scala. Tali vincoli risultano indipendenti dal processo di formazione dei buchi neri primordiali e vengono detti vincoli diretti. Esistono poi vincoli non connessi ai buchi neri ma a qualcosa di intimamente connesso ad essi, tali vincoli non sono applicabili a tutti gli scenari di formazione dei buchi neri primordiali e vengono detti indiretti.

### 3.1 Buchi neri primordiali evaporati

I buchi neri primordiali con massa inferiore alla massa critica ( $\sim 10^{15} g$ ) son già scomparsi dall'Universo attuale o sono nello stadio finale dell'evaporazione. Nonostante ciò le particelle ad alta energia che hanno emesso lasciano segnali attraverso i quali è possibile stabilire un limite superiore per l'abbondanza di buchi neri primordiali. Tali segnali includono la produzione di particelle suprsimmetriche leggere (se esistono) ( $10^4 g < M_{\text{PBH}} < 10^9 g$ ), la produzione di entropia nell'Universo giovane ( $10^6 g < M_{\text{PBH}} < 10^9 g$ ), la modifica delle abbondanze degli elementi leggeri prodotti nella nucleosintesi del Big-Bang ( $10^9 g < M_{\text{PBH}} < 10^{13} g$ ), un background di fotoni extragalattici ( $10^{14} g < M_{\text{PBH}} < 10^{15} g$ ) e lo smorzamento delle anisotropie radiazione cosmica di fondo su piccole scale ( $10^{13} g < M_{\text{PBH}} < 10^{14} g$ ). Dal confronto di tali effetti con i risultati osservativi è possibile ricavare limiti superiori per l'abbondanza dei buchi neri primordiali nei vari range di massa.

### 3.2 Lensing gravitazionale

Il lensing gravitazionale è un potente strumento in quanto, essendo basato unicamente sulla gravità, non soffre delle interferenze presenti nei segnali elettromagnetici dovuti all'interazione del buco nero con la materia circostante. Nell'approssimazione di lente sottile, che per gli scopi astrofisici è ottima, l'equazione della lente può essere scritta come (vedi *Fig 3.1* )

$$\theta D_s = D_s \beta + D_{\text{LS}} \alpha, \quad \alpha = \frac{4GM_{\text{BH}}}{D_{\text{L}} \theta} \quad (3.4)$$

In termini della distanza del piano della lente  $r = D_{\text{L}} \theta$  la suddetta equazione diviene

$$r^2 - r_0 r - R_{\text{E}}^2 = 0 \quad (3.5)$$

dove  $r_0 = D_{\text{L}} \beta$  e  $R_{\text{E}} = \sqrt{4GM_{\text{BH}} \frac{D_{\text{L}} D_{\text{LS}}}{D_{\text{S}}}}$  è il raggio di Einstein. Le posizioni delle immagini saranno

$$r_{1,2} = \frac{1}{2} \left( r_0 \pm \sqrt{r_0^2 - 4R_{\text{E}}^2} \right). \quad (3.6)$$

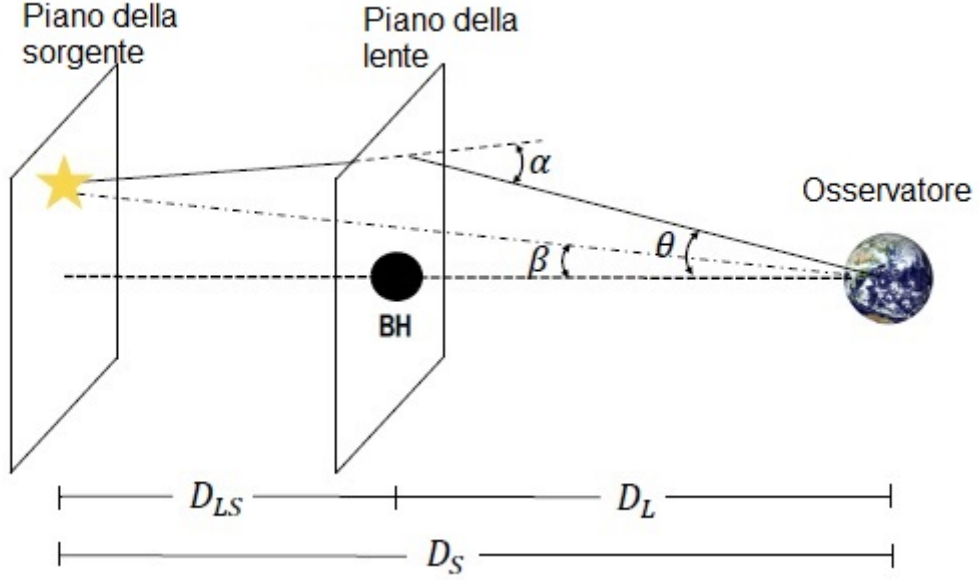


Figura 3.1: Schema dell'effetto di lensing gravitazionale provocato da un buco nero frapposto fra la sorgente e l'osservatore

Vi sono sempre due immagini a parte il caso in cui  $\beta = 1$  ossia qualora le immagini siano allineate, in tale circostanza si forma un cerchio, detto anello di Einstein, il cui raggio è dato da  $R_E$ . Gli effetti di lensing divengono significativi quando  $r_0 \leq R_E$ . La separazione angolare fra le due immagini è data da

$$\Delta \sim \frac{R_E}{D_L} = \sqrt{\frac{4HM_{BH}}{D_S} \frac{1-x}{x}} \approx 0,3 \text{ mas} \left( \frac{M}{10M_\odot} \right)^{\frac{1}{2}} \left( \frac{D_S}{100 \text{ kpc}} \right)^{-\frac{1}{2}} \quad (3.7)$$

Dove si è fatto uso della parametrizzazione  $D_L = D_S x$  con  $0 < x < 1$ .

Con il termine microlensing si intendono quei fenomeni per i quali la separazione angolare delle immagini è talmente piccola da non poter essere rilevata nelle osservazioni. In altre parole la separazione è inferiore alla risoluzione angolare dello strumento. Ciò che può comunque essere osservato è la sovrapposizione di due immagini che risulta più luminosa della sorgente. Il fattore di amplificazione  $A$  è dato da

$$A = \frac{u^2 + 2}{u\sqrt{u^2 + 4}}, \quad u = \frac{r_0}{R_E} \quad (3.8)$$

A  $r_0 = R_E$ ,  $A = 1.34$ . Qualora l'oggetto che funge da lente si muove lungo la linea di vista che congiunge l'osservatore alla sorgente l'amplificazione diviene funzione del tempo. Un'utile quantità utilizzata nello studio del microlensing è lo spessore ottico  $\tau$ ,

tale quantità esprime quanto una sorgente di background subisca microlensing dato da un oggetto compatto con un fattore di amplificazione superiore a 1.34. Assumendo che tutti gli oggetti abbiano la medesima massa è possibile scrivere

$$\tau = \int_0^{D_S} dr n_{\text{BH}}(r) \pi R_E^2(r) = 4\pi G \int_0^{D_S} dD_L \rho_{\text{BH}}(D_L) \frac{D_L(D_S - D_L)}{D_S} \quad (3.9)$$

Dove  $\rho_{\text{BH}} = n_{\text{BH}} M_{\text{BH}}$  è la densità di energia di buchi neri primordiali. Dall'ultima espressione possiamo vedere che lo spessore ottico dipende dalla densità di buchi neri.

I buchi neri primordiali supermassivi ( $M \geq 10^6 M_\odot$ ) sono anch'essi soggetti allo studio del lensing gravitazionale in particolare del millilensing. Qualora la separazione angolare delle immagini sia dell'ordine del mas si parla appunto di millilensing. Mediante l'uso di VLBI è stato possibile arrivare a definire  $f_{\text{PBH}}$  per un range di massa pari a  $10^7 < \frac{M_{\text{PBH}}}{M_\odot} < 10^9$ .

I buchi neri primordiali aventi massa compresa fra  $10^{-16} M_\odot < M < 10^{-13} M_\odot$ , ancora non in fase di evaporazione, possono essere osservati in una maniera molto particolare. Quando la lunghezza d'onda diviene comparabile al raggio di Schwazschild entra in gioco la diffrazione che modula l'amplificazione. Nell'approssimazione di ottica quasi geometrica il fattore di amplificazione è dato da

$$A = \frac{u^2 + 2 + 2 \sin(E_\gamma T_{12})}{u \sqrt{u^2 + 4}} \quad (3.10)$$

dove  $E_\gamma$  è l'energia di un fotone gamma e  $T_{12}$  la differenza tra il tempo di arrivo delle due immagini

$$T_{12} = 4GM_{\text{PBH}} \left[ \frac{1}{2} u \sqrt{u^2 + 4} + \ln \frac{\sqrt{u^2 + 4} + u}{\sqrt{u^2 + 4} - u} \right] \quad (3.11)$$

La diffrazione causa l'andamento sinusoidale del fattore di amplificazione. Si è ipotizzato che buchi neri di massa  $10^{-16} M_\odot < M < 10^{-13} M_\odot$  potessero introdurre le suddette oscillazioni negli spettri dei GRB (gamma ray burst). Tali oscillazioni tuttavia non sono mai state rilevate il che indica che tali buchi neri costituiscano materia oscura.

### 3.3 Vincoli dinamici

Grazie all'interazione gravitazionale i buchi neri primordiali possono interagire con qualsiasi sistema astrofisico, valutandone gli effetti e confrontandoli poi con le osservazioni è possibile stabilire dei limiti superiori all'abbondanza di tali buchi neri per diversi range di massa. In particolare l'interazione con i PBH può portare alla distruzione di determinati corpi celesti. Una nana bianca è una stella avente massa simile a quella del Sole ma confinata in un volume paragonabile a quello della Terra, essa è sostenuta dalla degenerazione

degli elettroni. Quando una nana bianca si avvicina al limite di Chandrasekhar per via dell'accrescimento essa esplode dando vita ad una supernova di tipo Ia. Il passaggio di un buco nero primordiale attraverso una nana bianca è in grado di avviare la reazione. Ovviamente se i buchi neri fossero troppi non sarebbe possibile osservare nane bianche nell'Universo attuale, mediante le osservazioni di queste ultime è possibile imporre dei limiti superiori all'abbondanza di buchi neri primordiali. I buchi neri primordiali più piccoli non sono in grado di avviare la reazione termonucleare mentre i più grandi interagiscono raramente con le nane bianche a causa del loro numero ridotto. Una stella di neutroni è ancor più densa di una nana bianca ed è sostenuta dalla degenerazione dei neutroni. Quando un PBH passa attraverso una stella di neutroni viene rallentato perdendo la sua energia cinetica. L'energia trasferita alla stella di neutroni è

$$\frac{E_{\text{loss}}}{M_{\text{PBH}}} \approx 6.3 \cdot 10^{-12} \left( \frac{M_{\text{PBH}}}{10^{22} \text{ g}} \right) \quad (3.12)$$

Se tale energia supera l'energia cinetica iniziale del PBH allora quest'ultimo rimane legato alla stella di neutroni iniziando ad oscillare attraverso la stella, continuando a perdere energia fino a restarvi intrappolata. Quando il PBH è bloccato all'interno della stella si ha un rapido accrescimento di materia e la conseguente distruzione della stella. Come per le nane bianche le stelle di neutroni non possono interagire con PBH con un'eccessiva frequenza il che permette di fissare un limite superiore all'abbondanza dei buchi neri in un determinato range di masse  $10^{-14} < \frac{M_{\text{PBH}}}{M_{\odot}} < 10^{-8}$ .

### 3.4 Distruzione di binarie negli aloni galattici

Negli aloni galattici vi sono di sistemi binari, debolmente legati, le cui stelle sono separate da grandi distanze e dunque tali sistemi possono essere facilmente distrutti da un PBH. Ancora una volta le osservazioni di tali sistemi consentono di fissare dei limiti alle abbondanze di PBH. Ipotizzando che un buco nero passi in prossimità di un sistema binario, potrebbe distruggerlo al primo passaggio (regime catastrofico) o in più passaggi trasferendo lentamente energia (regime diffusivo). Ad ognuno dei due regimi corrisponde un tempo scala

$$t_{\text{d,cat}} \simeq 0.07 \frac{m_{\text{b}}^{\frac{1}{2}}}{G^{\frac{1}{2}} \rho_{\text{PBH}} a^{\frac{3}{2}}} \text{ Gyr} \quad t_{\text{d,diff}} \simeq 0.02 \frac{V m_{\text{b}}}{G M_{\text{PBH}} \rho_{\text{PBH}} a} \text{ Gyr} \quad (3.13)$$

I due regimi sono separati da una massa critica per la quale i tempi scala coincidono

$$M_{\text{PBH,c}} \simeq 30 M_{\odot} \left( \frac{m_{\text{b}}}{2 M_{\odot}} \right)^{\frac{1}{2}} \left( \frac{a}{10^4 \text{ AU}} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{V}{200 \text{ Km/s}} \quad (3.14)$$

Al di sopra di tale massa è sufficiente un solo passaggio per distruggere il sistema ergo si è in regime catastrofico, viceversa si ha il regime diffusivo. E' possibile ricavare il valore

limite di  $f_{\text{PBH}}$  imponendo che i suddetti tempi scala siano maggiori dell'età del sistema binario. Il tipico tempo scala è dato da

$$t_{\text{d,cat}} \simeq 3 \text{ Gyr} \left( \frac{m_{\text{b}}}{1 M_{\odot}} \right) f_{\text{PBH}}^{-1} \left( \frac{\rho_{\text{DM}}}{0.01 M_{\odot}/pc^3} \right)^{-1} \left( \frac{a}{0.1 pc} \right)^{-\frac{3}{2}} \quad (3.15)$$

Affiancati a tali effetti distruttivi sui sistemi binari ve ne sono di molto simili ma applicati agli ammassi globulari, in questo caso sono però coinvolte molte più stelle. Riscrivendo la (3.14) per un ammasso globulare si ottiene

$$M_{\text{PBH,c}} \simeq 10^5 M_{\odot} \left( \frac{m_{\text{gc}}}{10^5 M_{\odot}} \right)^{\frac{1}{2}} \left( \frac{a_{\text{gc}}}{10 pc} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{V}{200 \text{ Km/s}} \quad (3.16)$$

Il tempo scala del regime catastrofico diviene invece:

$$t_{\text{d,cat}} \simeq 1 \text{ Gyr} \left( \frac{m_{\text{gc}}}{10^5 M_{\odot}} \right) f_{\text{PBH}}^{-1} \left( \frac{\rho_{\text{DM}}}{0.01 M_{\odot}/pc^3} \right)^{-1} \left( \frac{a_{\text{gc}}}{10 pc} \right)^{-\frac{3}{2}} \quad (3.17)$$

Per  $f_{\text{PBH}} \simeq 1$  il tempo scala è inferiore al tempo di vita degli ammassi e l'osservazione degli stessi fornisce validi limiti all'abbondanza di buchi neri primordiali.

Un ulteriore vincolo dinamico proviene dallo studio della frizione dei PBH negli aloni galattici. Se gli aloni galattici sono parzialmente formati da PBH alcuni di essi si troveranno verso il centro e subiranno una frizione dalle stelle e dai PBH più leggeri che li circondano. Tale frizione comporta la perdita di energia cinetica e la spiralizzazione di tali PBH verso il centro dell'ammasso galattico. Di conseguenza il centro dell'alone è costituito da un ammasso di buchi neri, poichè esiste un limite superiore alla massa del centro dell'alone questo può essere convertito in un limite per  $f_{\text{PBH}}$  in diversi range di massa. Il tempo scala impiegato per cadere al centro è:

$$\tau_{\text{fall}} \simeq 3 \text{ Gyr} \frac{\frac{r}{r_{\text{B}}} + 3}{\frac{r}{r_{\text{B}}} + 1} \left( \frac{r}{1 \text{ kpc}} \right)^{\frac{5}{2}} \left( \frac{M_{\text{BH}}}{10^6 M_{\odot}} \right)^{-1} \left( \frac{\ln \Lambda}{10} \right)^{-1} \quad (3.18)$$

Definiamo un raggio critico  $r_{\text{df}}$  al di sotto del quale i buchi neri spiraleggiano al centro della galassia nel tempo di vita dell'Universo. Nel centro della galassia si avrà una concentrazione di massa data da

$$M_{\text{con}} = f_{\text{PBH}} \int_0^{r_{\text{df}}} 4\pi \rho_{\text{PBH}} r^2 dr \quad (3.19)$$

Il limite a  $f_{\text{PBH}}$  può essere ricavato imponendo che la massa al centro della galassia non superi il limite osservativo di  $\sim 3 \cdot 10^6 M_{\odot}$ .

### 3.5 Riscaldamento del disco

I PBH, muovendosi nell'alone galattico, possono attraversare il disco. Le stelle avvicinate al buco nero acquisiscono velocità il che porta ad una modifica nel tempo della varianza della velocità delle stelle del disco. In altre parole il disco risulterà più caldo. Richiedendo che l'incremento di velocità non ecceda i limiti osservativi è possibile imporre dei vincoli a  $f_{\text{PBH}}$ . E' possibile scrivere l'andamento temporale della varianza:

$$\sigma^2 \simeq \frac{8\pi G^2 f_{\text{PBH}} M_{\text{PBH}} \ln \Lambda}{V} t \simeq (50 \text{ Km/s})^2 f_{\text{PBH}} \left( \frac{M_{\text{PBH}}}{10^6 M_\odot} \right) \left( \frac{M_{\text{PBH}}}{10^6 M_\odot} \right) \left( \frac{V}{200 \text{ Km/s}} \right)^{-1} \left( \frac{t}{10 \text{ Gyr}} \right) \quad (3.20)$$

### 3.6 Vincoli di accrescimento

L'accrescimento dei PBH da parte dei gas ha un impatto significativo sui vincoli di abbondanza degli stessi tuttavia la fisica necessaria allo studio è più complicata e richiede determinate assunzioni e regole empiriche.

La materia barionica, attratta dalla gravità, precipita sul buco nero riscaldandosi. In prossimità del buco nero la temperatura è estremamente elevata e si ha una forte emissione verso l'esterno modificando lo spettro della CMB. La non rilevazione di tali deviazioni può essere utilizzata per porre un limite superiore a  $f_{\text{PBH}}$ , tuttavia è estremamente complicato comprendere come il riscaldamento incida sulla CMB di conseguenza sono necessarie assunzioni ed approssimazioni. Il tasso di densità energetica prodotto dai PBH è dato da

$$\dot{\rho}_{\text{inj}} = f_{\text{PBH}} \frac{\rho_{\text{DM}}}{M_{\text{PBH}}} < L > \quad (3.21)$$

dove  $< L >$  è la luminosità media dovuta al gas barionico. I moderni studi assumono che l'energia depositata nel gas abbia tre effetti principali: la modifica della temperatura, della frazione di ionizzazione e l'eccitazione degli atomi di idrogeno

$$\Delta \dot{T} = \frac{2}{3n_{\text{tot}}} \frac{1 + 2\bar{x}_e}{3} \dot{\rho}_{\text{dep}}, \quad \Delta \dot{\bar{x}}_e = \frac{1 - \bar{x}_e}{3} \frac{\rho_{\text{dep}}}{E_1 n_{\text{H}}}, \quad \Delta \dot{x}_2 = \frac{1 - x_e}{3} \frac{\dot{\rho}_{\text{dep}}}{E_2 n_{\text{H}}} \quad (3.22)$$

dove  $E_1 = 13.6 \text{ eV}$  e  $E_2 = 10.2 \text{ eV}$ . Tali equazioni mostrano come le storie evolutive della temperatura e della frazione di ionizzazione sono modificate dall'accrescimento dei PBH. Ad esempio la modifica della frazione di ionizzazione cambia lo spessore ottico della CMB. L'accrescimento del gas nei PBH all'epoca del giovane UNiverso introduce delle distorsioni nello spettro della CMB poichè i fotoni prodotti nell'accrescimento non sono completamente termalizzati. I fotoni prodotti in un redshift compreso tra  $5 \cdot 10^4 < z < 2 \cdot 10^6$  raggiungono l'equilibrio cinetico il che conduce ad un potenziale chimico ( $\mu$ ) diverso da zero. I limiti superiore ed inferiore indicano rispettivamente la temperature oltre la quale si presenta una curva Planckiana e al di sotto della quale non è possibile

mantenere l'equilibrio cinetico. I fotoni generati a redshift  $200 < z < 5 \cdot 10^4$  comportano una distorsione Compton  $y$ . In questo caso il limite inferiore corrisponde alla temperatura a cui il gas barionico si disaccoppia dalla CMB. Purtroppo si è rilevato che le ampiezze indotte sia dal potenziale chimico che dalla distorsione  $y$  sono troppo deboli per essere rilevate.

### 3.7 Segnali X e radio dai PBH presenti

Nell'Universo attuale i PBH consentono accrescimento del gas se si trovano in ambienti densi, un confronto fra le previsioni teoriche e le osservazioni delle onde elettromagnetiche emesse permette l'identificazione di vincoli per  $f_{\text{PBH}}$ . Grazie ad osservazioni di Chandra e VLA è stato possibile ottenere un limite superiore per  $f_{\text{PBH}}$  nel range  $10 < \frac{M_{\text{PBH}}}{M_{\odot}} < 100$ . Il PBH accresce il mezzo circostante con un tasso pari a

$$\dot{M} = 4\pi\lambda (GM_{\text{PBH}})^2 \frac{\rho_{\text{gas}}}{(v_{\text{PBH}}^2 + c_s^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (3.23)$$

dove il fattore  $\lambda$  che misura il tasso di accrescimento di massa normalizzato è stato scelto pari a 0.02, in modo da essere consistente con le osservazioni X. L'efficienza radiativa, che converte l'accrescimento di massa in emissione bolometrica del gas è stato assunto come:

$$L_{\text{B}} = \eta \dot{M}, \quad \eta = 0.1 \left( \frac{\dot{M}}{0.01 \dot{M}_{\text{Edd}}} \right) \quad (3.24)$$

dove  $\dot{M}_{\text{Edd}}$  indica il fattore di crescita della massa corrispondente al limite di Eddington. Al fine di ottenere l'emissione X a partire da quella bolometrica si è utilizzata la relazione

$$L_{\text{X}} = 0.3 L_{\text{B}} \quad (3.25)$$

E' noto che molti BH sono accompagnati da getti radio. Mediante l'utilizzo del piano fondamentale, una relazione empirica fra la massa del BH con jet, luminosità X e radio, si è ricostruita la luminosità radio sotto l'assunzione che il PBH emettesse getti. Collegando tali dati con la massa del BH e mediante l'uso di simulazioni numeriche è stato possibile ottenere limiti per  $f_{\text{PBH}}$ .

### 3.8 Vincoli delle strutture su grande scala

I buchi neri primordiali, distribuiti casualmente nello spazio nell'Universo antico generano perturbazioni primordiali di densità su scale più grandi della loro distanza media. La distanza comovente media fra buchi neri primordiali è

$$l_{\text{mean}} = \left( \frac{M_{\text{PBH}}}{f_{\text{PBH}} \rho_{\text{DM}}} \right)^{\frac{1}{3}} = 0.3 \text{ Mpc} \left( \frac{M_{\text{PBH}}}{10^6 M_{\text{odot}}} \right)^{\frac{1}{3}} \left( \frac{f_{\text{PBH}}}{10^{-3}} \right)^{\frac{1}{3}} \quad (3.26)$$



Denotando con  $n_{\text{PBH}}$  la densità numerica comoviente dei buchi neri primordiali, il numero di buchi neri in un dato volume  $\lambda^3$  sarà  $N_\lambda = n_{\text{PBH}}\lambda^3$ . La varianza delle fluttuazioni di materia oscura è data da:

$$\langle \delta_{\text{DM}}^2 \rangle = \left\langle \frac{\delta \rho_{\text{PBH}}}{\rho_{\text{DM}}} \right\rangle = f_{\text{PBH}}^2 N_\lambda^{-1} = \frac{f_{\text{PBH}} M_{\text{PBH}}}{\rho_{\text{DM}} \lambda^3} \quad (3.27)$$

La dipendenza delle fluttuazioni da  $\lambda^{-3}$  denota effetti maggiori sulle piccole scale.

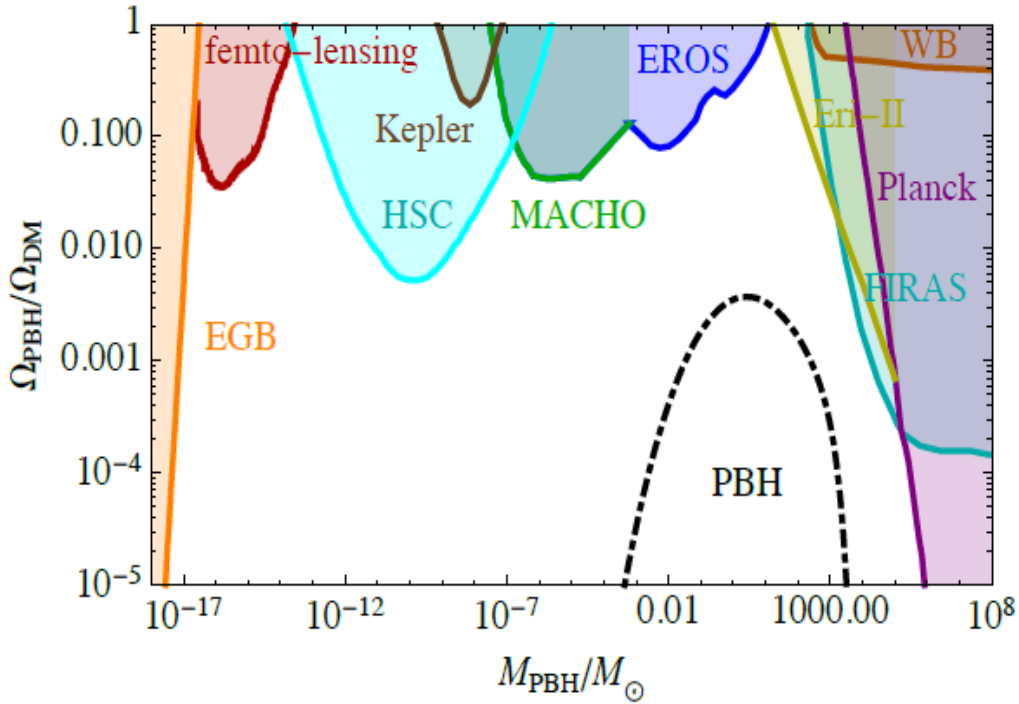


Figura 3.2: Il grafico mostra i vincoli superiori a  $f_{\text{PBH}}$  ottenuti con i diversi metodi esposti nei vari intervalli di massa.

In alternativa in termini di spettro di potenza adimensionale i PBH forniscono un contributo

$$P_{\delta_{\text{DM}}}(k) = \frac{k^3}{2\pi^2} \frac{f_{\text{PBH}} M_{\text{PBH}}}{\rho_{\text{DM}}} \quad (3.28)$$

Basandosi sul fatto che le fluttuazioni di materia oscura hanno un maggior effetto sulle scale piccole se ne sono studiati gli effetti sulla foresta di  $LY\alpha$ . Gli spettri di quasar e galassie lontane mostrano umeroze righe di assorbimento note come foresta  $LY\alpha$ . Ciò è dovuto all'interporsi di idrogeno neutro tra il quasar e la terra (tipicamente a  $z = 2 \sim 5$ ) il quale assorbe i fotoni attraverso la transizione  $Ly\alpha$  (da  $n = 1$  a  $n = 2$ ). La lunghezza

d'onda a riposo corrispondente a tale riga è  $\lambda = 1216 \text{ \AA}$ . Quando i fotoni sono assorbiti dall'idrogeno neutro a  $z_c$  la lunghezza d'onda risulterà  $\lambda = \lambda_{Ly\alpha} (1 + z_c)$ . Lo spessore ottico di tale riga in direzione del quasar è dato da

$$\tau_{Ly\alpha}(\lambda) \simeq 1.3 \Delta_b(z_c) \left( \frac{x_{HI}(z_c)}{10^{-5}} \right) \left( \frac{1 + z_c}{4} \right)^{\frac{3}{2}} \quad (3.29)$$

dove  $\frac{\Delta_b = n_b}{\bar{n}_b}$  è la densità barionica normalizzata per la densità media e  $x_{HI}$  è la frazione di idrogeno neutro. Questa equazione mostra che l'assorbimento  $Ly\alpha$  è più intenso laddove i barioni sono più concentrati. La sovrapposizione delle perturbazioni di materia oscura con le perturbazioni adiabatiche standard viene usata per calcolare le nubi di righe  $Ly\alpha$  per vari range di masse con l'uso di simulazioni idrodinamiche. A questo punto lo viene calcolato lo spettro di potenza e confrontato con quello delle osservazioni. Si è scoperto che i buchi neri di massa superiore a  $\sim 10^4 M_\odot$  comprendenti tutta la materia oscura risultano inconsistenti con le righe  $Ly\alpha$ . E' possibile ottenere il limite

$$f_{PBH} < \left( \frac{M_{PBH}}{10^4 M_\odot} \right)^{-1} \quad (3.30)$$

Tale limite diviene privo di significato quando la distanza media dei PBH diviene superiore alla dimensione della nube di  $Ly\alpha$ . Ha senso invece quando è soddisfatta

$$f_{PBH} > 3 \cdot 10^{-4} \left( \frac{M_{PBH}}{10^7 M_\odot} \right) \left( \frac{l_{Ly\alpha}}{1 \text{ Mpc}} \right)^{-3} \quad (3.31)$$

### 3.9 Vincoli indiretti

Fino ad ora si sono considerati gli effetti astrofisici e cosmologici dei buchi neri primordiali discutendo come sia possibile porre dei limiti alla loro abbondanza. I vincoli fin ora imposti sono diretti, nel senso che gli effetti osservati sono tutti dovuti alla presenza dei buchi neri e non dipendono dal modo in cui essi si sono formati. Qualsiasi modello cosmologico che preveda buchi neri primordiali deve soddisfare i vincoli diretti. Accanto a questi vincoli diretti vi sono quelli indiretti. I buchi neri primordiali si formano a causa del collasso gravitazionale delle perturbazioni di densità primordiale in regioni in cui la fluttuazione è particolarmente significativa ( $\sigma \sim 10$ ), tali regioni sono piuttosto rare. Le altre zone che non presentano una disomogenità tale da dar vita ad un buco nero possono tuttavia dar vita a degli effetti, dipendenti dalle proprietà statistiche delle perturbazioni di densità primordiali, i quali possono accordarsi o meno con le osservazioni. I vincoli che si andranno ad imporre saranno dunque indiretti perchè non provocati dai PBH ma dalle fluttuazioni di densità da cui essi derivano. Uno dei vincoli possibili è dato dalle onde gravitazionali le quali, data la loro recente rilevazione, costituiscono un nuovo e

promettente strumento di ricerca. L'effetto delle perturbazioni di densità primordiale è quello di dar vita ad onde gravitazionale, la loro evoluzione è separata al primo ordine perturbativo in quanto le perturbazioni sono scalari e le onde gravitazionali tensorali. A partire dal secondo ordine tuttavia non è più così. Le onde gravitazionali, che vengono prodotte alla stessa epoca dei buchi neri, viaggiano nello spazio e permangono anche nell'Universo attuale. Al fine di studiare l'abbondanza di buchi neri è utile introdurre il seguente parametro

$$\beta = \left( \frac{\rho_{\text{PBH}}}{\rho_{\text{tot}}} \right)_{\text{at formation}} = \left( \frac{H_0}{H_{\text{form}}} \right)^2 \left( \frac{a_{\text{form}}}{a_0} \right)^{-3} \Omega_{\text{CDM}} f_{\text{PBH}} \quad (3.32)$$

Tale parametro può essere messo in relazione alla probabilità che una perturbazione superi la soglia critica di formazione del buco nero e da esso è possibile ricavare  $f_{\text{PBH}}$ :

$$\beta = \int_{\zeta_{\text{crit}}}^{\infty} P(\zeta) d\zeta \quad (3.33)$$

La forma della funzione  $P(\zeta)$  è oggetto di dibattito: si iniziò lo studio assumendo una distribuzione gaussiana, che risultò non soddisfacente, per poi passare a forme più complicate contenenti parametri liberi come ad esempio:

$$P(\zeta) = \frac{1}{2^{\frac{3}{2}} \bar{\sigma} \Gamma\left(1 + \frac{1}{p}\right)} \exp \left[ - \left( \frac{|\zeta|}{\sqrt{2} \bar{\sigma}} \right)^p \right] \quad (3.34)$$

Un ulteriore metodo per determinare vincoli all'abbondanza di PBH è lo studio della CMB infatti le perturbazioni di densità primordiale possono distorcerne lo spettro. Le perturbazioni di fotoni e barioni che rientrano nel raggio di Hubble prima del disaccoppiamento subiscono oscillazioni acustiche che saranno seguentemente cancellate dalla diffusione dei fotoni (smorzamento di Silk). Usando il libero cammino medio dei fotoni  $\frac{l_{\text{mp}}}{\sigma_{\text{T}} n_e}$ , dove  $n_e$  è la densità di elettroni liberi, il numero d'onda  $k$  comovente alla perturbazione all'epoca dell'estinzione è

$$k = \frac{1}{1+z} \sqrt{n_e \sigma_{\text{T}} H(z)} \simeq 4 \cdot 10^{-6} (1+z)^{\frac{3}{2}} \text{ Mpc}^{-1} \quad (3.35)$$

Se lo smorzamento avviene prima di  $z \approx 2 \cdot 10^6$  l'effetto è quello di provocare un aumento di entropia comovente nell'unità di volume. Se invece lo smorzamento avviene nell'intervallo  $5 \cdot 10^4 < z < 2 \cdot 10^6$  si raggiunge l'equilibrio cinetico, i fotoni acquisiscono un potenziale chimico  $\mu$  e la loro distribuzione diviene quella di Bose-Einstein. Usando l'ultima equazione è possibile ricavare l'intervallo di numero d'onda entro il quale si assiste ad una distorsione " $\mu$  - type":  $\frac{50 \leq k}{\text{Mpc} < 10^4}$  Se infine le perturbazioni si dissipano oltre  $z \approx 5 \cdot 10^4$  non viene raggiunto l'equilibrio e si verificherà la distorsione Compton

*y - type*. Gli studi sulla non hanno rilevato le distorsioni previste il che ha consentito di escludere la presenza di PBH nell'intervallo  $2 \cdot 10^4 < M_{\text{PBH}} < M_{\odot} < 2 \cdot 10^{13}$ . Questa conclusione tuttavia è valida solo se i PBH si sono generati a seguito di perturbazioni di densità distribuite in modo Gaussiano, distribuzioni fortemente non Gaussiane non escludono la presenza di tali buchi neri.

## 3.10 Onde gravitazionali

Prima del Febbraio 2016 la ricerca di PBH poggiava tutta sullo spettro elettromagnetico, dopo la prima rilevazione di onde gravitazionali si è aperta una nuova strada di ricerca basata proprio su queste ultime. Diversi gruppi di ricerca hanno ipotizzato che le onde gravitazionali rilevate, provenienti dal merger di due BH di masse  $29M_{\odot}$  e  $36M_{\odot}$ , siano la prima evidenza sperimentale di PBH. Tale affermazione, per quanto affascinante, necessita di essere supportata da un soddisfacente meccanismo di formazione di binarie di PBH, in secondo luogo è importante che tale scenario non sia in conflitto con i vincoli precedentemente esposti. E' inoltre importante sottolineare che sono state anche avanzate altre possibili spiegazioni, nonostante ciò l'ipotesi che le onde gravitazionali si siano originate dal merger di due PBH risulterà, dalla seguente trattazione, quantomeno plausibile.

### 3.10.1 Formazione di sistemi binari di PBH

Nella presente sottosezione verranno esposti due diversi meccanismi di formazione di sistemi binari di PBH, tali sistemi non sono incompatibili, bensì operano in differenti epoche cosmologiche. Il primo meccanismo descritto opera nell'epoca dell'universo dominata dalla radiazione: si assume la funzione di massa monocromatica dei PBH, una loro distribuzione uniforme e si tratta  $f_{\text{PBH}}$  come un parametro libero. Subito dopo la formazione dei PBH nell'universo primordiale la loro distanza media è superiore all'orizzonte di Hubble. A causa della rapida espansione cosmica la distanza media cresce in prporzione al fattore di scala  $a(t) \propto t^{1/2}$ . Poichè l'orizzonte di Hubble cresce come  $H^{-1}(t) \propto t$  la distanza media, relativa all'orizzonte di Hubble, decresce man mano che l'universo si espande. Indicando con  $l_{\text{PBH}}(z)$  la distanza media tra PBH ad un redshift  $z$ , la sua lunghezza, normalizzata per l'orizzonte di Hubble, è data da

$$H(z)l_{\text{PBH}}(z) = H(z)n_{\text{PBH}}^{-1/3}(1+z)^{-1} \simeq 6 \cdot 10^{-6} f_{\text{PBH}}^{-1/3} \left( \frac{1+z}{1+z_{\text{eq}}} \right) \left( \frac{M_{\text{PBH}}}{30M_{\odot}} \right)^{1/3} \quad (3.36)$$

per  $z > z_{\text{eq}}$ , dove  $z_{\text{eq}}$  è il redshift a cui materia e radiazione si equivalgono e  $n_{\text{PBH}}$  è la densità numerica comoviente dei PBH. Di conseguenza, per i PBH di massa stellare e a meno che  $f_{\text{PBH}}$  sia molto piccolo ( $f_{\text{PBH}} < 10^{-15}$ ), vi è un periodo dell'era della radiazione in cui vi è più di un PBH nell'orizzonte di Hubble.

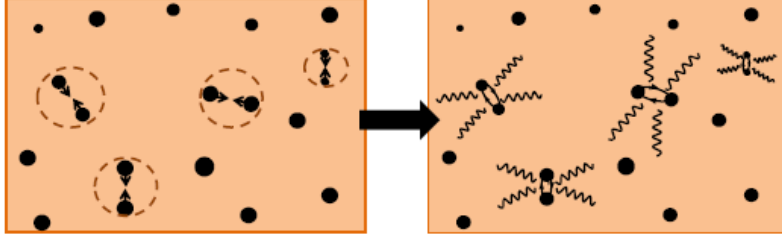


Figura 3.3: Una rappresentazione schematica della formazione di sistemi binari di PBH nell'era della radiazione

Sia ora  $x$  la distanza comoviente fra due PBH vicini. La separazione fisica ad un dato redshift è dunque  $x/(1+z)$ . L'espansione cosmica tende a trascinare i due PBH lontano l'uno dall'altro mentre l'interazione gravitazionale tende a farli avvicinare. Il tempo di free-fall corrispondente diviene più corto del tempo di Hubble se

$$x < x_{\max} \equiv f_{\text{PBH}^{1/3}} l_{\text{PBH}}(z=0) \quad (3.37)$$

I PBH che soddisfano tale condizione si disaccoppiano dall'espansione cosmica e diventano un sistema legato. Il redshift di disaccoppiamento è dato da

$$1 + z_{\text{dec}} = (1 + z)_{\text{eq}} \left( \frac{x_{\max}}{x} \right)^3 \quad (3.38)$$

Mentre i due PBH si avvicinano i PBH circostanti, specialmente il più vicino, esercitano coppie sul sistema legato e, di conseguenza, i due PBH evitano lo scontro frontale e formano un sistema binario fortemente eccentrico (vedi *Fig 3.3*). L'asse maggiore dell'orbita binaria è  $a = x/(1 + z_{\text{dec}})$ . Il momento angolare  $J$  può essere stimato moltiplicando la coppia esercitata dal PBH più vicino per il tempo di free-fall

$$J \simeq t_{\text{ff}} G M_{\text{PBH}}^2 (1 + z_{\text{dec}}) \frac{x^2}{y^3} \quad (3.39)$$

dove  $y$  è la distanza comoviente dal PBH più vicino. Assumendo un moto Kepleriano, dopo la formazione del sistema binario, il momento angolare è relazionato all'eccentricità  $e$  dalla relazione

$$J^2 = G \mu^2 M a (1 - e^2) \quad (3.40)$$

dove  $\mu$  ed  $M$  sono rispettivamente la massa ridotta e la massa totale. E' possibile convertire tali equazioni in termini di  $x$  ed  $y$  come

$$a = \frac{\rho_{\text{c},0} \Omega_{\text{DM}}}{(1 + z_{\text{eq}}) M_{\text{PBH}}} x^4 \quad e = \sqrt{1 - \left( \frac{x}{y} \right)^6} \quad (3.41)$$

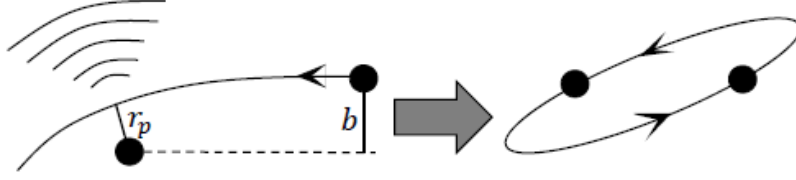


Figura 3.4: Una schematizzazione dell'incontro fra PBH

Data la distribuzione casuale dei PBH, la probabilità che le distanze comoventi giacciono negli intervalli  $(x + dx)$  ed  $(y + dy)$  è data da

$$dP = \frac{4\pi x^2 dx}{n_{\text{PBH}}^{-1}} \frac{4\pi y^2 dy}{n_{\text{PBH}}^{-1}} \exp\left(\frac{4\pi y^3}{3n_{\text{PBH}}^{-1}}\right) \Theta(y - x) \quad (3.42)$$

Invece di studiare tale probabilità è possibile lavorare con una versione semplificata

$$dP = \frac{4\pi x^2 dx}{n_{\text{PBH}}^{-1}} \frac{4\pi y^2 dy}{n_{\text{PBH}}^{-1}} \Theta(y - x) \Theta(y_{\text{max}} - y) \quad y_{\text{max}} = \left(\frac{4\pi}{3} n_{\text{PBH}}\right)^{-1/3} \quad (3.43)$$

Si noti che a causa di  $y_{\text{max}}$  vi è un valore massimo di eccentricità per  $x$  fissato:

$$e_{\text{max}}^2 = 1 - \left(\frac{4\pi}{3} n_{\text{PBH}}\right)^2 \left(\frac{(1 + z_{\text{eq}}) M_{\text{PBH}}}{\rho_{\text{c},0} \Omega_{\text{DM}}} a\right)^{3/2} \quad (3.44)$$

Conoscendo la distribuzione di probabilità di  $(x, y)$  è possibile tradurla in termini di  $(a, e)$  mediante l'equazione (3.41)

$$dP = \frac{4\pi^2}{3} n_{\text{PBH}}^{1/2} (1 + z_{\text{eq}})^{3/2} f_{\text{PBH}}^{3/2} a^{1/2} e (1 - e^2)^{-3/2} da de \quad (3.45)$$

Tale equazione fornisce quanti sistemi binari di PBH con parametri orbitali  $(a + da)$ ,  $(e + de)$  esistono nell'universo all'epoca di formazione. Dopo che un sistema binario di PBH si è formato nell'era della radiazione continua ad emettere onde gravitazionali, il sistema si distruggerà con lo scontro dei PBH molto tempo dopo la formazione.

Oltre che nell'era della radiazione i sistemi binari di PBH potrebbero formarsi anche nell'universo attuale. Si consideri la situazione in cui un PBH viaggiando nello spazio passi vicino ad un secondo PBH. La figura 3.4 mostra una schematizzazione dell'incontro ravvicinato con parametro d'impatto  $b$  e periastron  $r_p$ . In prossimità del periastron l'accelerazione relativa tra i PBH diviene massima e si ha il picco di emissione di radiazione gravitazionale. Se il quantitativo di energia liberato attraverso l'emissione di onde gravitazionali supera l'energia cinetica dei PBH questi divengono un sistema legato. Poiché la collisione diretta è improbabile tipicamente si forma un sistema binario. Il tasso

di perdita energetica, mediato nel tempo, è dato da

$$\left\langle \frac{dE}{dt} \right\rangle = -\frac{32}{5} \frac{G^4 m_1^2 m_2^2 (m_1 + m_2)}{a^5 (1 - e^2)^{7/2}} \left( 1 + \frac{73}{24} e^2 + \frac{37}{96} e^4 \right) \quad (3.46)$$

Di conseguenza la perdita di energia durante un'orbita di periodo  $T$  è

$$\Delta E = -T \left\langle \frac{dE}{dt} \right\rangle = \frac{64\pi \sqrt{G(m_1 + m_2)} G^3 m_1^2 m_2^2}{5r_p^{7/2} (1 + e)^{7/2}} \left( 1 + \frac{73}{24} e^2 + \frac{37}{96} e^4 \right) \quad (3.47)$$

dove si è utilizzata la terza legge di Keplero e  $r_p = a(1 - e)$ . E' possibile approssimare la traiettoria utilizzando un'ellisse per cui  $e = 1$ , di conseguenza l'energia persa diviene

$$\Delta E = \frac{85\pi \sqrt{G(m_1 + m_2)} g^3 m_1^2 m_2^2}{12\sqrt{2} r_p^{7/2}} \quad (3.48)$$

Se l'energia persa supera l'energia cinetica pari a  $\mu v^2/2$ , dove  $\mu$  è la massa ridotta e  $v$  la velocità relativa alla massima distanza, allora il sistema diviene legato e si forma un sistema binario. Ciò impone una condizione su  $r_p$

$$r_p < r_{p,\max} = \left[ \frac{85\pi}{6\sqrt{2}} \frac{G^{7/2} (m_1 + m_2)^{3/2} m_1 m_2}{v^2} \right] \quad (3.49)$$

Nell'approssimazione Newtoniana la relazione fra  $b$  ed  $r_p$  è data da

$$b^2(r_p) = r_p^2 + \frac{2GM r_p}{v^2} \quad (3.50)$$

Un incontro in cui il parametro d'impatto è inferiore a  $b(r_{p,\max})$  genera un sistema binario. Nel limite  $r_p \ll b$  la sezione d'urto per formare una sezione binaria è

$$\sigma = \pi b(r_{p,\max})^2 \simeq \left( \frac{85\pi}{3} \right)^{2/7} \frac{\pi (2GM_{\text{PBH}})^2}{v^{18/7}} \quad (3.51)$$

I buchi neri formati nell'epoca attuale si scontrano in un tempo inferiore a quello della vita dell'universo a differenza dei sistemi binari originati nell'era della radiazione.

### 3.10.2 Tasso di merger dei sistemi binari di PBH

I sistemi binari originati nell'era della radiazione continueranno ad emettere onde gravitazionali, e dunque energia, finché non si fonderanno. Poiché i parametri orbitali iniziali sono stocastici alcuni sistemi binari hanno effettuato il merger nel passato, per altri il merger avviene nel presente e per altri nel futuro. In un sistema binario, composto da

due masse  $m_1$  ed  $m_2$  e di parametri orbitali  $(a, e)$ , le masse si fonderanno dopo un tempo  $t$  dato da

$$t = \frac{15}{304} \frac{a^4}{G^3 m_1 m_2 (m_1 + m_2)} \left[ \frac{(1 - e^2)}{e^{12/19} \left(1 + \frac{121}{304} e^2\right)^{870/2299}} \right]^4 \int_0^e de' \frac{e'^{29/19}}{(1 - e'^2)^{-3/2}} \left(1 + \frac{121}{304} e'^2\right)^{870/2299} \quad (3.52)$$

Il limite inferiore dell'integrale rispecchia il fatto che l'orbita può al massimo essere circolare, tuttavia a causa della piccolezza delle forze mareali rispetto all'attrazione gravitazionale dei due PBH l'eccentricità è tipicamente prossima all'unità. Quando  $e \simeq 1$  la formula (3.52) può essere semplificata:

$$t = \frac{3}{85} \frac{1}{G^3 m_1 m_2 (m_1 + m_2)} (1 - e^2)^{7/2} a^4 \quad (3.53)$$

Tale equazione mostra che i sistemi binari ad alta eccentricità collassano in tempi molto più brevi rispetto a quelli con orbita circolare. Per semplicità si assuma che i PBH abbiano la medesima massa, in questo caso la formula si semplifica ulteriormente:

$$t(a, e) = Q(1 - e^2)^{7/2} a^4 \quad Q = \frac{3}{170} \frac{1}{G^3 M_{\text{PBH}}^3} \quad (3.54)$$

Mediante l'uso di tale equazione è possibile scrivere  $a$  come funzione di  $t$  ed  $e$  per riscrivere la probabilità (3.45) come

$$dP = \frac{4\pi^2}{3} n_{\text{PBH}}^{1/2} (1 + z_{\text{eq}})^{3/2} f_{\text{PBH}}^{3/2} a^{1/2} e (1 - e^2)^{-3/2} \frac{\partial a}{\partial t} dt de \quad (3.55)$$

poichè le misurazioni non rilevano l'eccentricità si integra tale probabilità su  $e$  lungo la curva  $t = \text{const}$  fino al punto in cui la linea interseca la curva  $e = e_{\text{max}}$  o la curva  $a = a_{\text{max}}$  a seconda della quale venga raggiunta per prima (vedi Fig 3.5). Ponendo  $\partial a / \partial t = a(t, e) / 4t$  ed integrando su  $e$  si ottiene

$$dP = \frac{3}{85} \left(\frac{t}{T}\right)^{3/8} \left[ \frac{1}{(1 - e_{\text{upper}}^2)^{29/16}} - 1 \right] \frac{dt}{t} \quad T \equiv Q \left( \frac{3y_{\text{max}}}{4\pi f_{\text{PBH}}(1 + z_{\text{eq}})} \right)^4 \quad (3.56)$$

dove

$$e_{\text{upper}} = \begin{cases} \sqrt{1 - \frac{t}{T}^{6/37}} & \text{per } t < t_c \\ \sqrt{1 - \left(\frac{4\pi f_{\text{PBH}}}{3}\right)^2 \left(\frac{t}{t_c}\right)^{2/7}} & t > t_c \end{cases} \quad (3.57)$$

e dove  $t_c = T \left(\frac{4\pi f_{\text{PBH}}}{3}\right)^{37/3}$ . Ciò fornisce la probabilità che un dato PBH formi un sistema binario e compia un merger in un tempo compreso nell'intervallo  $(t, t + dt)$ . Dunque il tasso di merger  $R$  per unità di volume nell'unità di tempo è dato da

$$R = n_{\text{PBH}} \frac{dP}{dt} = \frac{3n_{\text{PBH}}}{58} \left(\frac{t}{T}\right)^{3/8} \left[ \frac{1}{(1 - e_{\text{upper}}^2)^{25/16}} - 1 \right] \frac{1}{t} \quad (3.58)$$



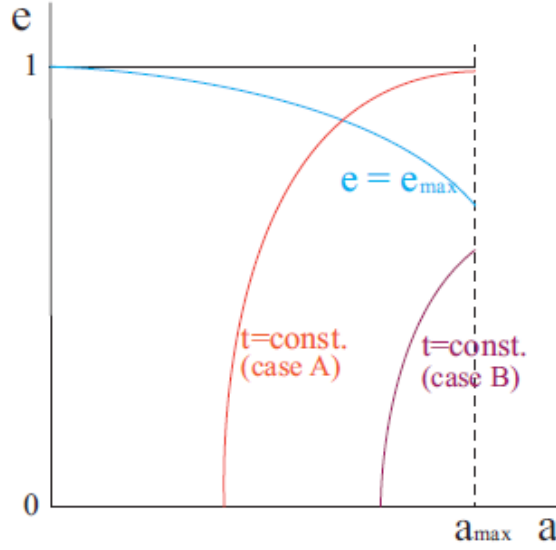


Figura 3.5: Un grafico di  $e = e_{\max}$  in funzione di  $a$

La curva rossa in *Fig 3.6* mostra il tasso di merger  $R$ , per  $M_{\text{PBH}} = 30M_{\odot}$  e  $t = 14\text{Gyr}$ , come funzione di  $f_{\text{PBH}}$ . Nella figura è possibile osservare come il tasso di merger eccede enormemente quello rilevato da LIGO per  $f \simeq 1$  ed invece giace nella banda stimata per  $f = 5 \cdot 10^{-4} \simeq 2 \cdot 10^{-3}$ , di conseguenza la possibilità che i PBH costituiscano una piccola parte della materia oscura è osservativamente rilevante se si considera il presente meccanismo di formazione di sistemi binari di PBH. Il ginocchio a  $f \simeq 7 \cdot 10^{-4}$  corrisponde al punto di biforcazione  $t = t_c$ .

Per quanto riguarda i sistemi binari nel presente universo il tasso di merger può essere calcolato come segue. La sezione d'urto (3.51) mostra che la formazione di sistemi binari è effettiva per basse velocità, inoltre gli incontri sono più probabili per regioni di alta densità. Tali fatti suggeriscono che la formazione di sistemi binari di PBH avvenga efficacemente negli aloni di materia oscura a bassa massa, i quali sono densi e presentano una bassa velocità viriale. Il tasso di merger in un alone di massa  $M_h$  è dato da

$$R_h(M_h) = \int_0^{R_{\text{vir}}} dr 4\pi r^2 \frac{1}{2} \left( \frac{\rho_{\text{PBH}}(r)}{M_{\text{PBH}}} \right)^2 \langle \sigma v_{\text{PBH}} \rangle \quad (3.59)$$

dove  $\rho_{\text{PBH}}(r)$  è il profilo di densità dei PBH nell'alone, e  $\langle \sigma v_{\text{PBH}} \rangle$  è la media sulla distribuzione di velocità relativa con  $\sigma$  dato dall'equazione (3.51). Si assuma il profilo Navarro-Frenk-White per  $\rho_{\text{PBH}}(r)$  e la distribuzione Maxwell-Boltzmann per la velocità relativa. Il tasso di merger totale, per unità di volume e di tempo, è dato da

$$R = \int_{M_{\min}} dM_h \frac{dn}{dM_h} R_h(M_h) \quad (3.60)$$

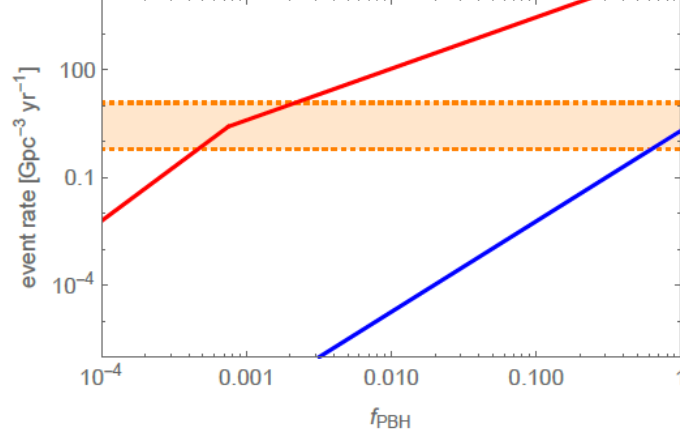


Figura 3.6: Tasso di merger atteso per i due differenti meccanismi di formazione di sistemi binari di PBH. La linea rossa rappresenta il tasso di merger atteso per i sistemi binari formati nell'era della radiazione, la curva blu invece si riferisce ai sistemi binari formati nel presente universo. La banda arancione è il tasso di merger osservato da LIGO

dove  $dn/sM_h$  è la funzione di massa dell'alone e  $M_{\min} \simeq 400M_{\odot}f_{\text{PBH}}^{-1}$  è la massa minima degli aloni non ancora evaporati al giorno d'oggi. Per implementare  $R$  è possibile utilizzare tre distinte funzioni di massa: una derivata dal formalismo di Press-Schechter, una da Tinker et al.<sup>[24]</sup> e l'ultima da Jenkins et al.<sup>[25]</sup> Il risultato per  $M = 30M_{\odot}$  è

$$R \simeq 2\alpha_{\text{PBH}}^{53/21} \text{Gpc}^{-3}\text{yr}^{-1} \quad (3.61)$$

dove  $\alpha \simeq 1, 0.6, 10^{-2}$  rispettivamente per i tre casi sopra elencati. La curva blu in *Fig 3.6* mostra  $R$  per  $\alpha = 1$ . Dalla figura si evince che il tasso di merger calcolato si accorda con quello osservato da LIGO per  $f_{\text{PBH}} \simeq 1$ . Il fatto che vi sia una regione per  $f_{\text{PBH}} \leq 1$  che sia consistente con le osservazioni di LIGO rende interessante il presente meccanismo di formazione di sistemi binari di PBH. Tale meccanismo diviene importante qualora se i merger di sistemi binari di PBH prodotti nell'era della radiazione sono significativamente inibiti da qualche meccanismo.

### 3.10.3 Vincoli sull'abbondanza di PBH dall'osservazione di onde gravitazionali

Nelle sottosezioni precedenti si è potuto vedere, per sistemi binari di circa  $30M_{\odot}$  per PBH, per quali valori di  $f_{\text{PBH}}$  i risultati teorici si sposano con le osservazioni. Il metodo esposto può essere utilizzato per imporre dei vincoli all'abbondanza di PBH. Eseguendo il procedimento, come è stato fatto da Haimoud et al.<sup>[22]</sup>, per diverse masse si può

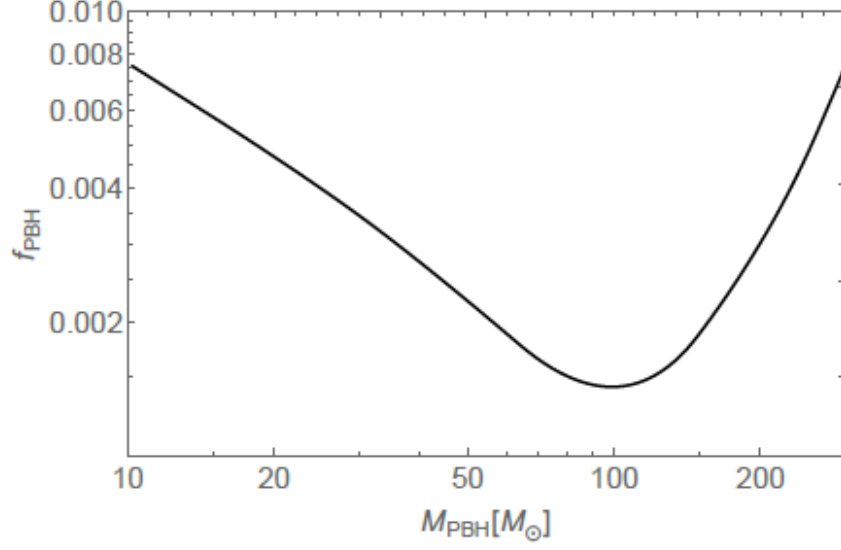


Figura 3.7: Limite superiore di  $f_{\text{PBH}}$  ottenuto dalla richiesta che il tasso di merger dei sistemi binari di PBH formati nell'era della radiazione non superi quello stimato da LIGO. Si è assunta una funzione di massa monocromatica

ottenere il grafico riportato in *Fig* (3.7) dove si può notare che i PBH di massa stellare sono esclusi come componente dominante della materia oscura.

# Capitolo 4

## Elementi di Relatività Generale

In questo capitolo verranno riassunti brevemente i principi della Relatività Generale ed i suoi risultati più importanti, necessari alla trattazione dei buchi neri primordiali, seguendo l'esposizione di R. d'Inverno<sup>[2]</sup>. D'ora in avanti i vettori tridimensionali saranno indicati in grassetto mentre gli indici greci assumeranno quattro valori possibili (0, 1, 2, 3) ed indicheranno la coordinata temporale le coordinate spaziali. Gli indici latini invece assumeranno i valori (1, 2, 3) ed indicheranno le sole coordinate spaziali. Inoltre si utilizzerà la notazione di Einstein in cui gli indici ripetuti devono essere sommati.

### 4.1 Principi della Relatività Generale

La teoria della Relatività Generale nasce nel 1916 e si propone come estensione della teoria della Relatività Ristretta pubblicata dieci anni prima. Quest'ultima teoria nasceva dal tentativo di risolvere alcune complicazioni, sorte con la scoperta delle Equazioni di Maxwell, le quali non soddisfano il principio di relatività galileiano, all'epoca riconosciuto come vero; tale principio prevede l'invarianza delle leggi della fisica per le trasformazioni galileiane. Introducendo due nuovi principi e modificando la concezione di spazio e tempo assoluti Einstein riuscì ad ottenere una nuova teoria della dinamica in grado di accordarsi con l'elettromagnetismo. I principi della Relatività Ristretta sono i seguenti<sup>[2]</sup>:

*I. Principio di relatività: Le leggi fisiche hanno tutte la stessa forma in tutti i sistemi di riferimento inerziali.*

*II. Postulato della costanza della velocità luce: La velocità della luce nel vuoto ha lo stesso valore in tutti i sistemi di riferimento inerziali.*

Il prezzo da pagare per la nuova teoria è la perdita di una soddisfacente descrizione della gravità. Dal secondo principio della Relatività Speciale si può facilmente evincere che la velocità della luce nel vuoto è la massima velocità a cui si può trasmettere un informazione. La legge di gravitazione universale prevede l'interazione a distanza infatti

osservandone la formulazione:

$$F = -G \frac{m_1 m_2}{|r_{1,2}|^2} \mathbf{r}_{1,2} \quad (4.1)$$

è possibile notare come un eventuale modifica in una delle due masse o nella distanza che le separa si rifletterebbe immediatamente sull'altra senza alcun ritardo. La Relatività Generale si propone dunque di estendere la Relatività Ristretta in modo da poter inglobare l'interazione gravitazionale. Nella sua estensione della Relatività Ristretta Einstein vi pose alla base due principi fondamentali: il principio di equivalenza ed il principio di Relatività Generale che vengono esposti e discussi di seguito. La carica gravitazionale, o massa, è di tipo monopolare e dunque, a differenza di ciò che accade per altre forze fondamentali come la forza elettromagnetica, non è possibile creare un corpo neutro rispetto all'interazione gravitazionale. Nonostante non sia possibile schermare un campo gravitazionale è possibile annullarne localmente gli effetti, inserendosi nuovamente nell'ambito della Relatività Ristretta, considerando un sistema di riferimento che sia in caduta libera, ossia comovente con una particella di prova in caduta libera in un campo gravitazionale. Se in particolare si sceglie un sistema di riferimento non rotante su se stesso allora si ottiene un sistema di riferimento localmente inerziale, in quanto in un siffatto sistema di riferimento una particella di prova persevera nel suo stato di quiete o di moto rettilineo uniforme. Tali sistemi di riferimento sono solo localmente inerziali in quanto le osservazioni eseguite devono essere limitate ad una regione in cui la variazione del campo gravitazionale sia sufficientemente piccola da non essere rilevata. E' possibile esprimere il principio di equivalenza in più modi equivalenti:

*Principio di equivalenza: Non ci sono esperimenti locali che possano discriminare tra una caduta libera in un campo gravitazionale ed un moto uniforme nello spazio in assenza di campo gravitazionale.*

*Principio di equivalenza: Un sistema linearmente accelerato rispetto ad un sistema inerziale in Relatività Speciale è localmente identico ad un sistema in quiete in un campo gravitazionale*

Sostanzialmente in seno alla teoria della Relatività Generale la gravità viene vista come forza inerziale, vale a dire che la sua presenza dipende dal sistema di riferimento. E' possibile chiarificare il significato del principio di equivalenza con semplici esperimenti mentali. Si consideri un osservatore chiuso in un ascensore, privo di finestre o di mezzi di comunicazione con il mondo esterno, munito dell'attrezzatura necessaria per svolgere semplici esperimenti di dinamica. Se l'ascensore è posto su di un razzo che, lontano da sorgenti di campo gravitazionale, si muove con accelerazione  $g$  verso l'alto allora l'osservatore lasciando un corpo fermo lo vedrà cadere con accelerazione  $g$ . Se l'ascensore si trovasse invece sulla Terra e si trascurassero i moti rotatori l'osservatore rileverebbe nuovamente la caduta del corpo con accelerazione  $g$ , i due casi sono assolutamente indistinguibili per l'osservatore proprio come richiesto dalla prima formulazione del principio

di relatività. Se ora l'ascensore si muovesse di moto rettilineo uniforme nello spazio l'osservatore constatarebbe che un corpo lasciato libero rimarrebbe in quiete rispetto a sé. Allo stesso modo se l'ascensore fosse in caduta libera l'osservatore percepirebbe nuovamente il corpo in quiete. Di conseguenza l'osservatore non può distinguere i due casi in ossequio alla seconda formulazione del principio di relatività. Accanto a questo primo principio vi è il

*Principio di Relatività Generale: Le leggi fisiche sono le stesse per tutti i sistemi di riferimento.*

Quest'ultimo principio è un'estensione del *principio di relatività* e stabilisce la possibilità di qualsiasi osservatore di scoprire le leggi della fisica. Tale estensione permette di superare le difficoltà logiche che presentano i sistemi inerziali, essendo essi infatti definiti come i sistemi in cui vale il principio d'inerzia, risultano non accelerati ma la costruzione di un simile sistema è tutt'altro che semplice. Se tale principio non fosse vero non avremmo modo di scoprire le leggi della fisica in quanto tutti gli esperimenti sono eseguiti in sistemi non inerziali.

## 4.2 Il formalismo della Relatività Generale

Il principio di relatività generale abolisce il concetto di osservatore privilegiato dichiarando l'equivalenza di qualsiasi sistema di riferimento. Tale principio si riflette nella struttura matematica della Relatività Generale che è espressa mediante il formalismo tensoriale. I tensori sono strutture matematiche che si comportano in modi specifici se sottoposti a trasformazioni di coordinate  $x^\alpha \rightarrow x'^\alpha$ . Un tensore covariante  $V_\alpha$  è un insieme di quantità associate ad un punto che si trasforma sotto un cambio di coordinate nel seguente modo:

$$V'_\beta = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\beta} V_\alpha \quad (4.2)$$

Una tale struttura al variare di  $\alpha$  descrive correttamente un quadrivettore, la componente zero descrive la componente temporale e le restanti tre le componenti spaziali. Un tensore covariante invece si trasforma come

$$V'^\beta = \frac{\partial x'^\beta}{\partial x^\alpha} V^\alpha \quad (4.3)$$

E' ovviamente possibile estendere il concetto di tensore a strutture più complesse contenenti più indici sia covarianti che controvarianti i quali, prendendo come esempio un tensore a tre indici, si trasformano nel seguente modo

$$T'^\alpha_{\beta\gamma} = \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\delta} \frac{\partial x^\epsilon}{\partial x'^\beta} \frac{\partial x^\phi}{\partial x'^\gamma} T^\delta_{\epsilon\phi} \quad (4.4)$$

Il formalismo tensoriale permette di riflettere, in una struttura matematica, il principio di Relatività Generale in quanto esprimendo un'equazione della fisica in forma tensoriale essa risulterà invariante per cambi di sistema di riferimento. I componenti di un'equazione tensoriale si trasformano tutti nel medesimo modo, di conseguenza le leggi della fisica avranno medesima forma in qualsiasi sistema di riferimento. Ad esempio se in un determinato sistema di riferimento un osservatore determina l'equazione tensoriale

$$S_{\beta}^{\alpha} = K_{\beta}^{\alpha} \quad (4.5)$$

Sotto una trasformazione di coordinate tale equazione apparirà come

$$S'_{\beta}{}^{\alpha} = \frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\gamma}} \frac{\partial x^{\delta}}{\partial x'^{\beta}} S_{\delta}^{\gamma} = \frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\gamma}} \frac{\partial x^{\delta}}{\partial x'^{\beta}} K_{\delta}^{\gamma} = K'_{\beta}{}^{\alpha} \quad (4.6)$$

L'equazione ha dunque mantenuto la medesima forma in due differenti sistemi di riferimento.

Nella teoria della Relatività Generale, come in quella ristretta, si considera lo spaziotempo fisico come uno spazio metrico. Tuttavia ora non si considera il solo spazio piatto descritto dalla metrica di Minkowski ma si ipotizza che lo spazio-tempo possa essere curvo, descritto da metriche diverse da quella di Minkowski, e che solo in ben determinati casi si riduca ad essere piatto. Se si considera una particella libera di muoversi sotto l'azione di campo gravitazionale allora, per il principio di equivalenza, esisterà un sistema di riferimento in caduta libera, localmente inerziale, in cui l'equazione del moto è quella di una linea retta nello spazio tempo

$$\frac{d\xi^2}{d\tau^2} = 0 \quad (4.7)$$

dove  $d\tau$  è il tempo proprio definito come

$$d\tau^2 = \eta_{\alpha\beta} dx^{\alpha} dx^{\beta} \quad (4.8)$$

dove  $\eta_{\alpha\beta} = (-1, 1, 1, 1)$  è la metrica di Minkowski. Se si effettua una trasformazione di coordinate si otterrà

$$0 = \frac{d}{d\tau} \left( \frac{\partial \xi^{\alpha}}{\partial x^{\mu}} \frac{dx^{\mu}}{d\tau} \right) = \frac{\partial \xi^{\alpha}}{\partial x^{\mu}} \frac{d^2 x^{\mu}}{d\tau^2} + \frac{\partial^2 \xi^{\alpha}}{\partial x^{\mu} \partial x^{\nu}} \frac{dx^{\mu}}{d\tau} \frac{dx^{\nu}}{d\tau} \quad (4.9)$$

moltiplicando ambo i lati dell'equazione per  $\partial x^{\lambda} / \partial \xi^{\alpha}$  si ottiene l'equazione del moto

$$0 = \frac{d^2 x^{\lambda}}{d\tau^2} + \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} \frac{dx^{\mu}}{d\tau} \frac{dx^{\nu}}{d\tau} \quad (4.10)$$

dove

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} = \frac{\partial^2 \xi^{\alpha}}{\partial x^{\mu} \partial x^{\nu}} \frac{\partial x^{\lambda}}{\partial \xi^{\alpha}} \quad (4.11)$$

è detta connessione affine e si annulla nel sistema di riferimento in caduta libera. Il suddetto procedimento permette di vedere la gravità come forza inerziale, infatti si può notare che l'equazione del moto è radicalmente cambiata da un sistema di riferimento all'altro: nel primo caso si ha accelerazione nulla e nel secondo appare un termine che rende l'accelerazione non nulla. Nonostante l'apparenza, dovuta alla notazione, la connessione affine non è un tensore infatti essa è nulla in un singolo sistema di riferimento e non nulla in tutti gli altri. Il tempo proprio, espresso dalla (4.8), si trasforma nel seguente modo:

$$d\tau^2 = \eta_{\alpha\beta} \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} dx^\mu \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\nu} dx^\nu = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (4.12)$$

dove

$$g_{\mu\nu} = \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\nu} \eta_{\alpha\beta} \quad (4.13)$$

è detto tensore metrico e consente di esprimere la distanza fra due punti vicini  $x^\mu$  e  $x^\mu + dx^\mu$  e descrive dunque la geometria locale dello spazio tempo

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (4.14)$$

La metrica consente inoltre l'abbassamento o innalzamento degli indici:

$$V_\mu = g_{\mu\nu} V^\nu, \quad V^\mu = g^{\mu\nu} V_\nu \quad (4.15)$$

Questo semplice esempio mostra come in un sistema di riferimento in caduta libera la metrica risulti piatta mentre in altri si ha uno spazio tempo curvo il che è l'essenza della Relatività Generale. La connessione affine può essere inoltre essere scritta in funzione del tensore metrico:

$$\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \frac{1}{2} g^{\lambda\kappa} \left[ \frac{\partial g_{\kappa\nu}}{\partial x^\mu} + \frac{\partial g_{\kappa\mu}}{\partial x^\nu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\kappa} \right] \quad (4.16)$$

Inserendo tale formulazione della connessione affine nell'equazione (4.10) è possibile notare che il tensore metrico può essere interpretato come potenziale gravitazionale.

### 4.3 Derivata covariante

Le equazioni della fisica necessitano di uno strumento fondamentale quale la derivazione, tuttavia si può osservare facilmente che la derivata di un tensore non è necessariamente un tensore. Se si considera infatti un vettore controvariante la cui legge di trasformazione è

$$V'^\mu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha} V^\alpha \quad (4.17)$$

derivando rispetto  $x^\lambda$  si ottiene

$$\frac{\partial V'^\mu}{\partial x^\lambda} = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\lambda} \frac{\partial V^\nu}{\partial x^\rho} + \frac{\partial^2 x'^\mu}{\partial x^\nu \partial x^\rho} \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\lambda} V^\nu \quad (4.18)$$



la quale non è una quantità vettoriale. Per rispettare il principio di Relatività Generale è fondamentale introdurre una forma di derivazione il cui risultato sia un tensore, tale funzione è assolta dalla derivata covariante. La derivata covariante differisce leggermente in caso di indici controvarianti o covarianti: dato un vettore controvariante  $V^\mu$  la sua derivata covariante sarà

$$V_{;\lambda}^\mu = \frac{\partial V^\mu}{\partial x^\lambda} + \Gamma_{\lambda\kappa}^\mu V^\kappa \quad (4.19)$$

la quale definisce un tensore. Nel caso della derivazione covariante di un vettore covariante avremo:

$$V_{\mu;\lambda} = \frac{\partial V_\mu}{\partial x^\lambda} - \Gamma_{\mu\lambda}^\nu V_\nu \quad (4.20)$$

Questa forma di derivazione può facilmente essere estesa anche a tensori a più indici ed il risultato sarà dato dalla derivata parziale del tensore a cui si sommano tanti fattori  $\Gamma$  quanti sono gli indici controvarianti e se ne sottraggono quanti sono gli indici covarianti come mostrato nel seguente esempio:

$$T_{\lambda;\rho}^{\mu\sigma} = \frac{\partial T_\lambda^{\mu\sigma}}{\partial x^\rho} + \Gamma_{\rho\nu}^\mu T_\lambda^{\nu\sigma} + \Gamma_{\rho\nu}^\sigma T_\lambda^{\mu\nu} - \Gamma_{\lambda\rho}^\kappa T_\kappa^{\mu\sigma} \quad (4.21)$$

Poichè la connessione affine si annulla in un sistema di riferimento in caduta libera in tal caso la derivata covariante restituisce la semplice derivazione parziale. Tale proprietà suggerisce un semplice algoritmo per valutare gli effetti gravitazionali su di un sistema fisico: si scrivono le equazioni appropriate per la Relatività Speciale (metrica piatta), dopodichè si sostituisce  $\eta_{\mu\nu}$  con  $g_{\mu\nu}$  e le derivate parziali con le derivate covarianti.

## 4.4 Tensore di Riemann e tensore energia-impulso

Data una metrica  $g_{\mu\nu}$  non è immediato determinare se esprime uno spazio piatto e dunque, nella trattazione della Relatività, equivalente a  $\eta_{\mu\nu}$ . Infatti una generica trasformazione di coordinate non altera la piattezza metrica, ad esempio il cambio di coordinate da cartesiano a polare non introduce curvature nella metrica. Se la metrica risulta piatta allora esiste certamente un sistema di riferimento in cui essa è diagonale ed i suoi elementi sono tutti pari a  $\pm 1$ . Per comprendere se la metrica è piatta o curva esiste un utile strumento chiamato tensore di Riemann ed è così definito:

$$R_{\nu\lambda\kappa}^\mu = \partial_\lambda \Gamma_{\nu\kappa}^\mu - \partial_\kappa \Gamma_{\nu\lambda}^\mu + \Gamma_{\nu\kappa}^\sigma \Gamma_{\sigma\lambda}^\mu - \Gamma_{\nu\lambda}^\sigma \Gamma_{\sigma\kappa}^\mu \quad (4.22)$$

Il tensore di Riemann è dotato di venti componenti indipendenti ed il suo annullarsi implica la piattezza metrica, infatti in caso di metrica piatta si annullano i simboli di Christoffel e di conseguenza il tensore di Riemann. E' inoltre possibile dimostrare il seguente importante enunciato

*Teorema: Condizione necessaria e sufficiente affinché una metrica sia piatta è che il suo tensore di Riemann si annulli.*

Il tensore di Riemann consente la costruzione di altre importanti quantità, il tensore di Ricci e la curvatura scalare, nota anche come scalare di Ricci. Il tensore di Ricci è definito come la contrazione di due indici del tensore di Riemann

$$R_{\mu\nu} = R^{\alpha}_{\mu\alpha\nu} = g^{\alpha\gamma} R_{\gamma\mu\alpha\nu} \quad (4.23)$$

Tale tensore può essere interpretato come una misura della curvatura dello spazio tempo e da esso si può estrarre la curvatura scalare che risulta essere la traccia del tensore di Ricci:

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} \quad (4.24)$$

La curvatura scalare è geometricamente interpretata come un numero che misura il modo in cui è distorto il volume intorno ad un punto: se tale numero è positivo allora il volume di una sfera centrata nel punto è minore del volume di una sfera, avente il medesimo raggio, in uno spazio euclideo. Se la curvatura scalare è negativa invece la sfera avrà volume maggiore rispetto allo spazio euclideo.

Accanto al tensore di Riemann vi è un secondo tensore fondamentale nella formulazione della Relatività Generale: il tensore energia-impulso. La Relatività Ristretta ha esposto l'equivalenza di massa ed energia, il che suggerisce che qualsiasi forma di energia possa fungere da sorgente gravitazionale. L'energia e l'impulso possono essere racchiuse all'interno di un tensore  $T^{\mu\nu}$  detto appunto tensore-energia impulso. La componente  $(0,0)$  del tensore energia impulso è la densità di massa relativistica  $\rho$ , vale a dire la densità di energia divisa per la velocità della luce al quadrato

$$T^{00} = \rho \quad (4.25)$$

Il flusso della massa relativistica attraverso la superficie  $x^i$  è equivalente alla densità dell' $i$ -esima componente della quantità di moto:

$$T^{0i} = T^{i0} \quad (4.26)$$

Le componenti spaziali del tensore energia impulso  $T^{ik}$  rappresentano dunque il flusso della quantità di moto  $i$ -esima attraverso la superficie  $x^k$ . In particolare  $T^{ii}$  rappresenta la pressione e  $T^{ik}$  rappresenta lo sforzo di taglio. In seno alla Relatività Ristretta la conservazione del quadrimpulso è espressa dall'equazione di continuità

$$\frac{\partial T^{\mu}_{\nu}}{\partial x^{\mu}} = 0 \quad (4.27)$$

Tale equazione all'interno della teoria della Relatività Generale può essere scritta come:

$$T^{\mu}_{\nu;\mu} = 0 \quad (4.28)$$

## 4.5 Equazione di campo di Einstein

La Relatività Generale ha come equazione fondamentale l'equazione di campo di Einstein, essa svolge un ruolo centrale ed esemplifica l'essenza della teoria. Originalmente l'equazione venne scritta come

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu} \quad (4.29)$$

Il lato sinistro dell'equazione contenente il tensore di Ricci e la curvatura scalare rappresenta la geometria ed il lato destro, contenente il tensore energia impulso, rappresenta il quantitativo di energia. Il lato sinistro dell'equazione può essere scritto in una forma più compatta

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R \quad (4.30)$$

dove  $G_{\mu\nu}$  è detto tensore di Einstein. Tale equazione, dato un tensore energia-impulso, consente di calcolare il tensore metrico, in altre parole partendo dal tensore energia-impulso è possibile ricavare la geometria dello spazio tempo ad esso associata. Viceversa data una particolare geometria, ossia un tensore metrico, è possibile determinare il tensore energia-impulso. Più in generale l'equazione di Einstein consiste in dieci equazioni che legano venti quantità: le dieci componenti di  $g_{\mu\nu}$  e le dieci componenti di  $T_{\mu\nu}$ . La formulazione originale dell'equazione di campo di Einstein tuttavia non prevede universi statici ma unicamente dinamici, in espansione o contrazione. Per ragioni storico culturali o personali Einstein era convinto della staticità dell'universo e di conseguenza impose il termine aggiuntivo più semplice possibile, oggi noto come costante cosmologica

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R + \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu} \quad (4.31)$$

Con l'introduzione di questo ulteriore fattore è possibile teorizzare la staticità dell'universo. Tuttavia le scoperte di Hubble nel 1929 permisero di determinare l'espansione dell'universo, nonostante ciò la scoperta non comportò l'abolizione del concetto di costante cosmologica. Infatti anche i modelli in espansione possono comprendere la costante cosmologica che viene interpretata come energia del vuoto, la quale è a sua volta interpretata come energia oscura. Esiste tuttavia una corrente di pensiero che vede nella costante cosmologica una delle tante costanti della natura e che non sia più misteriosa di altre come la velocità della luce o la costante di gravitazione universale.

## Capitolo 5

# La Soluzione di Schwarzschild e le sue estensioni analitiche

In questo capitolo si rivolgerà l'attenzione alla soluzione dell'equazione di campo Einstein, senza la costante cosmologica, nel caso più semplice: una massa sferica nel vuoto. Il procedimento è stato tratto dal testo di R. d'Inverno<sup>[2]</sup> Dicasi soluzione stazionaria una soluzione indipendente dal tempo mentre si dice statica una soluzione non evolutiva. La soluzione statica di conseguenza è simmetrica per inversione temporale. Ad esempio se un'automobile viaggia in modo dipendente dal tempo allora il sistema non sarà stazionario, il sistema diviene stazionario qualora l'auto viaggi a velocità costante. Nell'eventualità che la velocità del mezzo sia nulla allora il sistema è detto statico e di conseguenza se si inverte il verso del tempo non si apprezza alcuna differenza. Una metrica è detta stazionaria se esiste un sistema di coordinate in cui la metrica è indipendente dal tempo, cioè:

$$\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^0} = 0 \quad (5.1)$$

### 5.1 Derivazione

Volendo identificare la soluzione per una sorgente sferica circondata dal vuoto si avrà che all'esterno della massa non vi saranno né materia né energia ergo  $T_{\mu\nu} = 0$  e l'equazione di campo diverrà semplicemente

$$R_{\mu\nu} = 0 \quad (5.2)$$

All'interno del corpo sferico si avrà  $T_{\mu\nu} \neq 0$  e di conseguenza è necessario risolvere l'equazione di campo completa. La costruzione di una soluzione completa deriva dall'identificazione di soluzioni interne ed esterne alla sfera e dall'imposizione della continuità della metrica sul bordo. In questo modo è possibile ottenere una soluzione continua e definita sulla superficie nonostante la discontinuità del tensore energia impulso. L'elemento

di linea a simmetria sferica più generale possibile è

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = F(r, t) dt^2 - 2E(r, t) dt \mathbf{x} d\mathbf{x} - D(r, t) (\mathbf{x} d\mathbf{x})^2 - C(r, t) d\mathbf{x}^2 \quad (5.3)$$

dove compaiono gli elementi  $\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x}$  e  $d\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x}$  i quali, insieme a  $\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}$  sono invarianti per rotazione e di conseguenza rispondono correttamente alla richiesta del problema. Passando alle coordinate sferiche più consone al problema la suddetta metrica si riscrive come

$$ds^2 = \alpha(r, t) dt^2 - \beta(r, t) [d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2] - \gamma(r, t) dr^2 - \delta(r, t) dr dt \quad (5.4)$$

Il coefficiente tra parentesi quadre fornisce la metrica di una sfera immersa in  $\mathbb{R}^3$  di raggio unitario. Di conseguenza

$$ds^2(r = \text{cost}, t = \text{cost}) = \beta(r, t) (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \quad (5.5)$$

è una sfera di raggio  $\beta^{1/2}(r, t)$ . E' possibile eseguire una trasformazione di coordinate in modo da far apparire la sfera in maniera più familiare

$$\begin{cases} r'^2 = \beta(r, t) \\ t' = t \end{cases} \quad (5.6)$$

da cui sono facilmente ottenibili le relazioni

$$\begin{cases} r' = \beta^{1/2}(r, t) \\ dr' = \frac{1}{2\beta^{1/2}} \left[ \frac{\partial \beta}{\partial r} dr + \frac{\partial \beta}{\partial t} dt \right] \end{cases} \quad (5.7)$$

e la cui trasformazione inversa è

$$\left\{ dr = \left[ 2\beta^{1/2} dr' + \frac{\partial \beta}{\partial t} dt' \right] \left( \frac{\partial \beta}{\partial r} \right)^{-1} \right. \quad (5.8)$$

con tale trasformazione  $r'^2$  prende il posto di  $\beta(r, t)$  nella metrica (5.4) dove però tale variabile non ricopre il ruolo di distanza dal centro della sfera. E' possibile obiettare che tale trasformazione non esista nel caso che  $\beta(r, t)$  non dipenda da  $r$  ma un tale parametro non descriverebbe lo spazio tempo in quanto, a distanza infinita dalla sorgente, si deve riottenere la metrica di Minkowski che in coordinate sferiche è

$$ds^2 = dt^2 - dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \quad (5.9)$$

Per ragioni pratiche si rinomina  $r' = r$ . E' possibile eseguire anche una trasformazione su  $t$  tale che elimini il termine misto  $\delta(r, t)$  vale a dire in modo da diagonalizzare la metrica. Si consideri il differenziale

$$\alpha(t, r) dt - \delta(t, r) dr \quad (5.10)$$

La teoria delle equazioni differenziali afferma che è sempre possibile moltiplicare tale differenziale per un fattore integrante  $I = I(t, r)$  che lo renda un differenziale esatto. E' possibile usare questo risultato per definire una nuova coordinata temporale  $t'$  richiedendo che

$$dt' = I(t, r)[\alpha(t, r)dt - \delta(t, r)dr] \quad (5.11)$$

elevando tale differenziale al quadrato si ottiene

$$dt'^2 = I^2(\alpha^2 dt^2 - 2\alpha\delta dt dr + \delta^2 dr^2) \quad (5.12)$$

In tal modo si può ottenere l'uguaglianza

$$\alpha dt^2 - 2\delta dt dr = \alpha^{-1} I^{-2} dt'^2 - \alpha^{-1} \delta^2 dr^2 \quad (5.13)$$

In questo modo l'elemento di linea (5.4) può essere riscritto come

$$ds^2 = \alpha^{-1} I^{-2} dt'^2 - (\gamma - \alpha^{-1} \delta^2) dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \quad (5.14)$$

Definendo due nuove funzioni  $\nu$  e  $\lambda$  come

$$\alpha^{-1} I^{-2} = e^\nu \quad (5.15)$$

$$\gamma - \alpha^{-1} \delta^2 = e^\lambda \quad (5.16)$$

Omettendo, per praticità, gli apici si ottiene

$$ds^2 = e^\nu dt^2 - e^\lambda dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \quad (5.17)$$

dove  $\nu = \nu(r, t)$  e  $\lambda = \lambda(r, t)$ . Le definizioni di tali funzioni sono date in forma esponenziale semplicemente per praticità. A questo punto è possibile utilizzare le equazioni di Einstein nel vuoto al fine di determinare le funzioni  $\nu$  e  $\lambda$ . Se si indicano le derivate rispetto  $t$  ed  $r$  rispettivamente con un punto ed un apice si può verificare che le componenti non nulle del tensore di Einstein sono:

$$\begin{cases} G_0^0 = e^{-\lambda} \left( \frac{\lambda'}{r} - \frac{1}{r^2} \right) + \frac{1}{r^2} \\ G_0^1 = -e^{-\lambda} r^{-1} \dot{\lambda} = -e^{\lambda-\nu} G_1^0 \\ G_1^1 = -e^{-\lambda} \left( \frac{\nu'}{r} - \frac{1}{r^2} \right) + \frac{1}{r^2} \\ G_2^2 = G_3^3 = \frac{1}{2} e^{-\lambda} \left( \frac{\nu' \lambda'}{2} + \frac{\lambda'}{r} - \frac{\nu'}{r} - \frac{\nu'^2}{2} - \nu'' \right) + \frac{1}{2} e^{-\nu} \left( \ddot{\lambda} + \frac{\dot{\lambda}^2}{2} - \frac{\dot{\lambda} \dot{\nu}}{2} \right) \end{cases} \quad (5.18)$$

E' possibile dimostrare che l'ultima equazione del sistema è nulla se lo sono le altre tre. Di conseguenza vi sono tre equazioni indipendenti da risolvere

$$\begin{cases} e^{-\lambda} \left( \frac{\lambda'}{r} - \frac{1}{r^2} \right) + \frac{1}{r^2} = 0 \\ e^{-\lambda} \left( \frac{\nu'}{r} + \frac{1}{r^2} \right) - \frac{1}{r^2} = 0 \\ \dot{\lambda} = 0 \end{cases} \quad (5.19)$$

Sommando le prime due equazioni del sistema si ottiene la relazione fra  $\lambda$  e  $\nu$

$$\lambda' - \nu' = 0 \quad (5.20)$$

la quale integrata restituisce

$$\lambda - \nu = h(t) \quad (5.21)$$

dove  $h(t)$  è una funzione arbitraria. Dal sistema (5.19) si evince che  $\lambda$  è funzione solo di  $r$  e dunque la prima equazione del sistema è un'equazione differenziale ordinaria che può essere riscritta come

$$(re^{-\lambda})' = 1 \quad (5.22)$$

Tale equazione integrata fornisce

$$re^{-\lambda} = r + \text{const} \quad (5.23)$$

Scegliendo come costante d'integrazione  $-2m$ , il motivo di tale scelta risulterà chiara in seguito, si ottiene

$$e^\lambda = \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} \quad (5.24)$$

In questa maniera l'elemento di linea si scrive come

$$ds^2 = e^{h(t)} \left(1 - \frac{2m}{r}\right) - \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \quad (5.25)$$

La funzione  $h(t)$  è eliminabile attraverso un ultimo cambio di coordinate: si assume una nuova coordinata temporale definita come

$$t' = \int_c^t e^{\frac{1}{2}h(u)} du \quad (5.26)$$

dove  $c$  è una costante arbitraria, in tal modo, omettendo gli apici, si ottiene l'elemento di linea di Schwarzschild

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2m}{r}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2(d\theta^2 \sin^2\theta + d\phi^2) \quad (5.27)$$

Si può provare immediatamente che la metrica ottenuta è stazionaria,  $\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^0} = 0$ . Tale risultato può risultare inatteso, nel caso newtoniano la simmetria sferica nulla ha a che vedere con l'indipendenza temporale, tuttavia la Relatività Generale prevede la stazionarietà per campi gravitazionali generati da corpi a simmetria sferica. Una tale sorgente dunque, al di fuori del proprio raggio, prevede lo spazio-tempo di Schwarzschild eppure non è vero il contrario: la metrica di Schwarzschild non ha necessariamente come sorgente una massa sferica, ergo in generale una sorgente non eredita la simmetria del suo

campo esterno. La soluzione di Schwarzschild è inoltre soddisfacente in quanto per  $r \rightarrow \infty$  si riottiene la metrica di Minkowski in coordinate sferiche, di conseguenza la soluzione è asintoticamente piatta. Una massa puntiforme  $M$  posta nell'origine  $O$  per la teoria newtoniana fornisce un potenziale  $\phi = -GM/r$ . Usando tale risultato come limite della teoria relativistica si ottiene

$$g_{00} = 1 + 2\phi/c^2 = 1 - 2GM/c^2r \quad (5.28)$$

confrontando questo risultato con l'elemento di linea di Schwarzschild si evince che

$$m = GM/c^2 \quad (5.29)$$

## 5.2 Diagrammi spazio-temporali e buchi neri

In generale un sistema di coordinate descrive solo una porzione di varietà, ad esempio le coordinate di Schwarzschild non descrivono gli assi  $\theta = 0, \pi$  in quanto in tali punti l'elemento di linea diviene degenero e la metrica cessa di essere di rango quattro. Tale degenerazione tuttavia non ha senso fisico in quanto è rimovibile attraverso un opportuno cambio di coordinate ad esempio passando alle coordinate cartesiane. La soluzione di Schwarzschild è degenero in altri due punti:  $r = 2m$  e  $r = 0$ . Per comprendere se una singolarità è rimovibile oppure no è possibile utilizzare uno scalare costruito attraverso il tensore di Riemann

$$R^{\alpha\beta\gamma\delta}R_{\alpha\beta\gamma\delta} = 48\frac{m^2}{r^6} \quad (5.30)$$

Essendo lo scalare indipendente dalle coordinate è lo strumento perfetto per identificare singolarità che possono essere eliminate mediante un semplice cambio di coordinate. Tale scalare è perfettamente regolare in  $r = 2m$  e, di conseguenza, tale singolarità è solo apparente, lo stesso non può dirsi di  $r = 0$  che rimane singolare. Normalmente la metrica di Schwarzschild è interpretata come una soluzione di vuoto esterna a qualsiasi sorgente sferica avente raggio superiore a  $2m$ . Al fine di interpretare correttamente la soluzione è utile avvalersi dello studio della struttura locale dei coni di luce attraverso l'uso di un sistema di coordinate detto di Eddington-Finkelstein. Il cono di luce viene definito come il luogo dei punti  $x_0^\mu + dx^\mu$  nelle vicinanze del punto  $x_0^\mu$  tali che

$$g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu = 0 \quad (5.31)$$

Il cono di luce locale pone restrizioni al moto di un osservatore la cui linea di universo è di tipo tempo e deve giacere all'interno del cono di luce. Ora si costruiranno i coni di luce per la soluzione di Schwarzschild in un sistema di coordinate consono ad eliminare la singolarità in  $r = 2m$ . Le direzioni radiali sono descritte dalla semplice equazione

$$ds^2 = 0 \quad (5.32)$$



assumendo  $\theta$  e  $\phi$  costanti si ottiene

$$dt^2 = \frac{dr^2}{\left(1 - \frac{2m}{r}\right)^2} \quad (5.33)$$

Introducendo la variabile

$$r^* = \int \frac{dr}{1 - \frac{2m}{r}} = r + 2m \ln \left( \frac{r}{2m} - 1 \right) \quad (5.34)$$

In questo modo è possibile scrivere

$$\frac{dr^*}{dt} = \pm 1 \quad (5.35)$$

tale equazione integrata fornisce

$$\begin{cases} t + r^* = \text{const} \\ t - r^* = \text{const} \end{cases} \quad (5.36)$$

Si definisce la coordinate nulla avanzata  $v = t + r^*$  e la si utilizza per sostituire la coordinata  $t$ :  $t = v - r^*$ , in questo modo

$$dt = dv - \frac{dr}{1 - \frac{2m}{r}} \quad (5.37)$$

da cui sostituendo nell'elemento di linea si ottiene

$$\begin{aligned} ds^2 &= \left(1 - \frac{2m}{r}\right) \left[ dv^2 - \frac{2dvdr}{1 - 2m/r} + \frac{dr^2}{\left(1 - 2m/r\right)^2} \right] - \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 d\Omega^2 = \\ &= \left(1 - \frac{2m}{r}\right) dv^2 - 2dvdr - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \end{aligned} \quad (5.38)$$

Si può notare immediatamente che la singolarità in  $r = 2m$  è stata eliminata ed è ora possibile studiare il comportamento della soluzione nel punto. Se si considera la superficie  $r = r_0$  l'elemento di linea viene riscritto come

$$ds_{r=r_0}^2 = \left(1 - \frac{2m}{r_0}\right) dv^2 - r_0^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \quad (5.39)$$

Se  $r_0 > 2m$  si ha segnatura time-like  $(+, -, -)$ , se  $r < 2m$  la segnatura è space-like  $(-, -, -)$  e se  $r = 2m$  la segnatura è nulla  $(0, -, -)$ . E' possibile ora studiare il cono di luce, definito da  $ds^2 = 0$ . Si ottiene

$$\frac{dv}{dr} = \frac{2}{1 - \frac{2m}{r}} \quad (5.40)$$

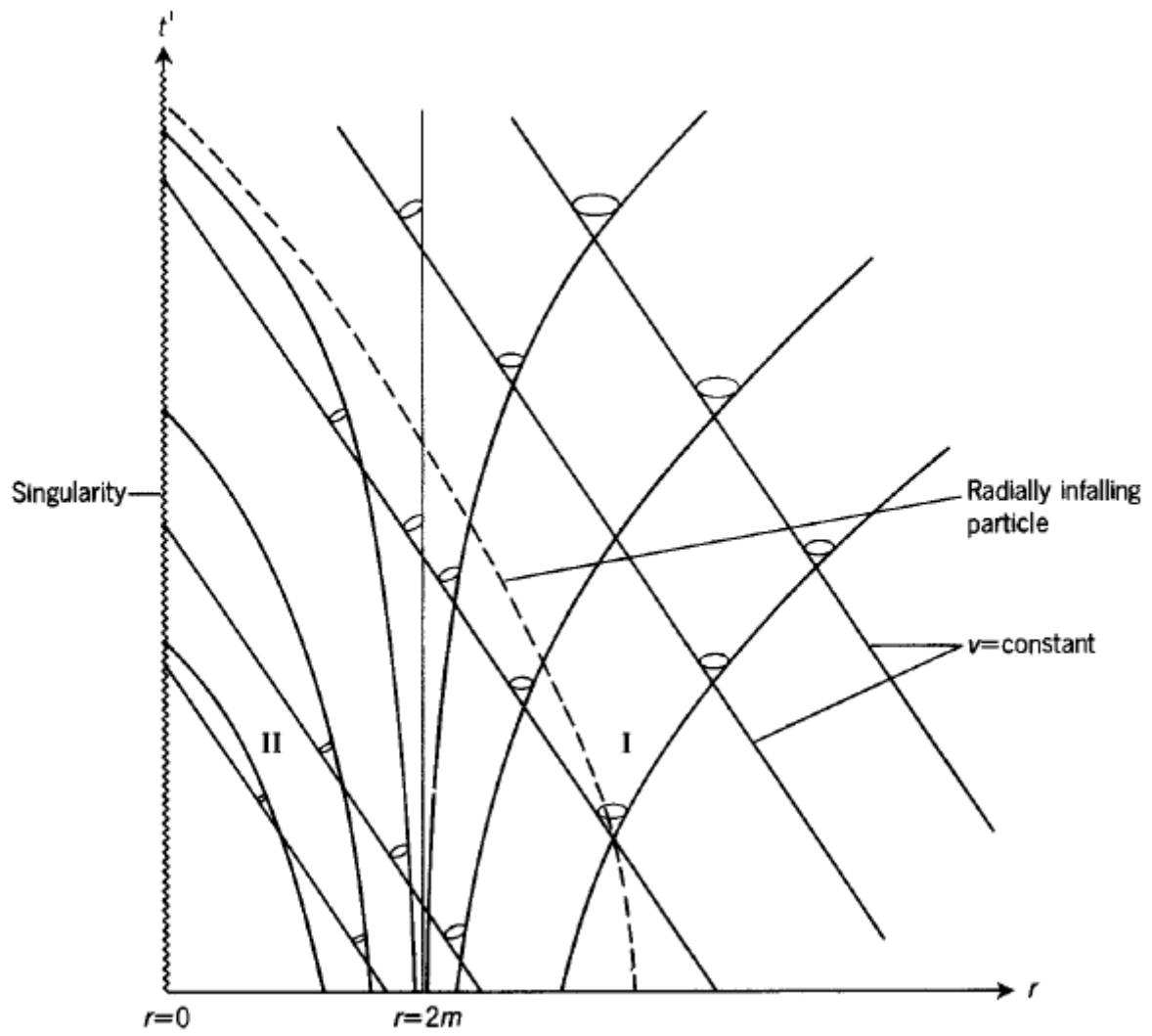


Figura 5.1: Soluzione di Schwarzschild nelle coordinate di Eddington-Finkelstein

queste vengono dette soluzioni entranti. E' possibile introdurre un'altra variabile  $t' = v - r = t + 2m \ln\left(\frac{r}{2m} - 1\right)$ , sostituendola all'interno dell'elemento di linea si ottiene

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2m}{r}\right) dt'^2 - \frac{4m}{r} dt' dr - \left(1 - \frac{2m}{r}\right) dr^2 - r^2 d\Omega^2 \quad (5.41)$$

ancora una volta non risultano singolarità per  $r = 2m$ . Ricalcolando la direzione radiale nulla si ottengono due soluzioni:

$$\begin{cases} \frac{dr}{dt'} = -1 \\ \frac{dr}{dt'} = \frac{r-2m}{r+2m} \end{cases} \quad (5.42)$$

Tale espressione, regolare in  $r = 2m$ , cambia di segno in tale punto e rappresenta una sorta di velocità radiale dei fotoni. Per  $r > 2m$  i fotoni tendono all'infinito, per  $r < 2m$  i fotoni puntano verso  $r = 0$  e per  $r = 2m$  il fotone è radialmente fermo (Fig 5.1). La retta  $r = 2m$  si comporta come una membrana semipermeabile: è possibile spostarsi dall'esterno verso l'interno ma neppure la luce può uscire una volta entrata. La regione compresa fra  $0 < r < 2m$  è detta regione di Buco Nero. Un ipotetico osservatore ignora completamente ciò che accade oltre  $r = 2m$ , detto orizzonte degli eventi, poichè nessuna informazione può uscire dalla regione di buco nero e raggiungerlo. Il medesimo ragionamento può essere eseguito utilizzando la coordinata ritardata  $u = t - r^*$  e definendo la coordinata temporale  $t^* = u + r$ , in questo modo l'elemento di linea

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2m}{r}\right) dt^{*2} + \frac{4m}{r} dt^* dr - \left(1 + \frac{2m}{r}\right) dr^2 - r^2 d\Omega^2 \quad (5.43)$$

Lo studio delle direzioni radiali nulle da come soluzioni

$$\begin{cases} \frac{dr}{dt^{*2}} = 1 \\ \frac{dr}{dt^*} = -\frac{(r-2m)}{(r+2m)} \end{cases} \quad (5.44)$$

In questo caso si ottiene una soluzione opposta a quella di buco nero detta di buco bianco: ancora una volta la retta  $r = 2m$  si comporta come superficie semipermeabile solo che in questo caso è possibile allontanarsi dall'origine e non esiste alcuna traiettoria che consenta dall'esterno l'attraversamento dell'orizzonte (Fig 5.2). Nessuna di queste soluzioni però pare completa in quanto nessuna delle coordinate prevede moti di andata e ritorno. Apparentemente entrambi i sistemi di coordinate forniscono una descrizione incompleta dello spazio tempo, le coordinate di Kruskal, che verranno esposte di seguito, consentono la massima estensione analitica della soluzione di Schwarzschild la quale tuttavia non è priva di singolarità. Unendo le due coordinate nulle

$$\begin{cases} t = \frac{v+u}{2} \\ r^* = \frac{v-u}{2} \end{cases} \quad (5.45)$$

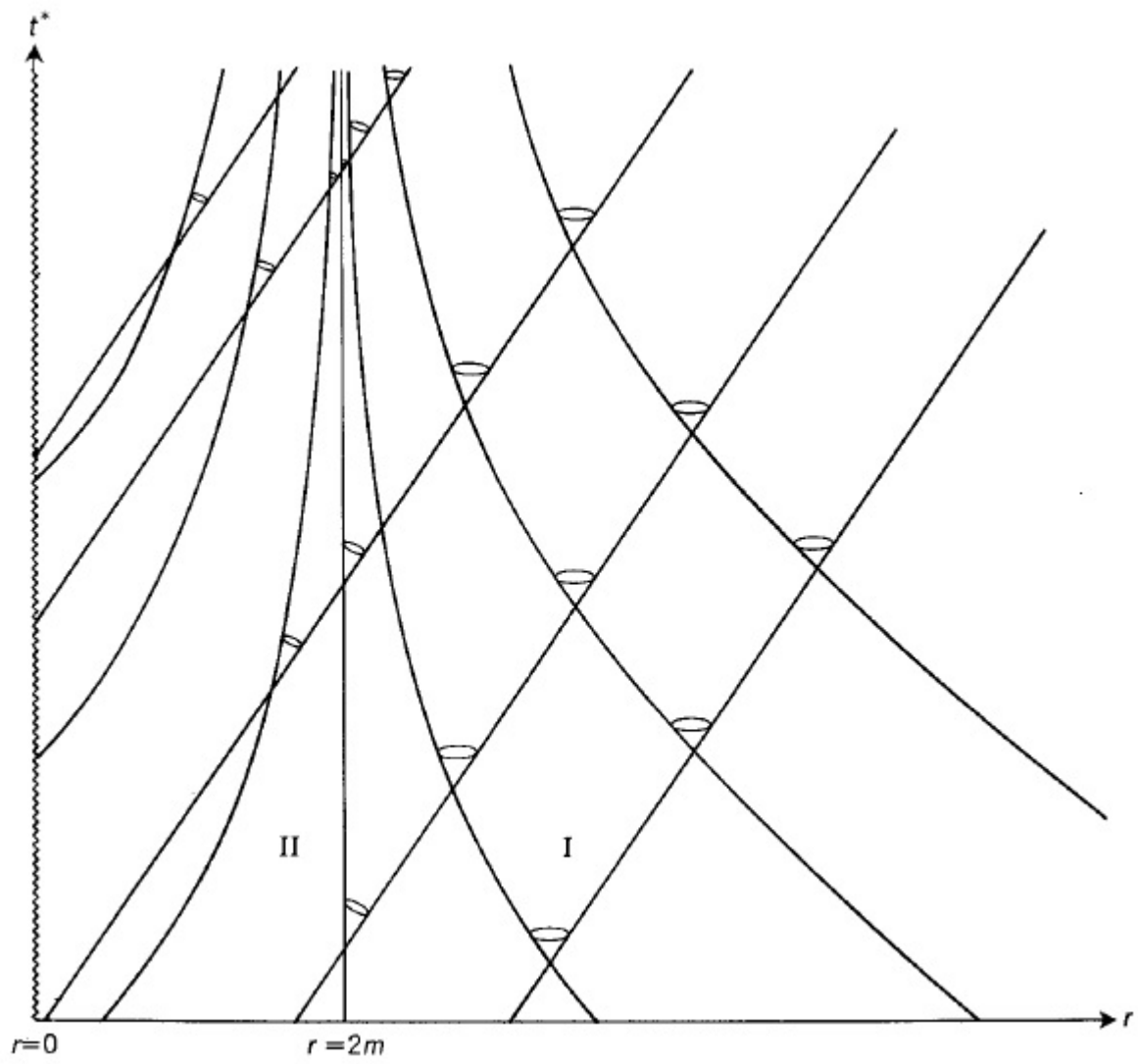


Figura 5.2: Soluzione di buco bianco

si ottiene l'elemento di linea

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2m}{r}\right) dudv - r^2(u, v) d\Omega^2 \quad (5.46)$$

il quale è tuttavia singolare per  $r = 2m$ . E' possibile risolvere il problema mediante il seguente metodo

$$r + 2m \cdot \ln\left(\frac{r}{2m} - 1\right) = \frac{v - u}{2} \quad (5.47)$$

da cui, isolando l'argomento del logaritmo si ottiene

$$\frac{r}{2m} - 1 = e^{\frac{v-u}{4m}} e^{-\frac{r}{2m}} \quad (5.48)$$

e poichè è possibile riscrivere

$$1 - \frac{2m}{r} = \frac{2m}{r} \left(\frac{r}{2m} - 1\right) \quad (5.49)$$

si può scrivere l'elemento di linea come

$$ds^2 = \frac{2m}{r} e^{-r/2m} e^{v-u/4m} dudv - r^2(u, v) d\Omega^2 \quad (5.50)$$

Si introducono ora le coordinate di Kruskal  $U = -e^{-u/4m}$ ,  $V = e^{v/4m}$  che vengono applicate alla (5.50) ottenendo

$$ds^2 = 32 \frac{m^3}{r} e^{-r/2m} dU dV - r^2(U, V) d\Omega^2 \quad (5.51)$$

la quale è una metrica regolare per  $r = 2m$ . Si introducono infine le coordinate  $T = (U + V)/2$  ed  $X = (U - V)/2$  per poter scrivere

$$ds^2 = 32 \frac{m^3}{r} e^{-r/4m} (dT^2 - dX^2) - r^2 d\Omega^2 \quad (5.52)$$

E' possibile studiare nuovamente i coni di luce ( $ds^2 = 0$ ) nel presente sistema di coordinate per  $\theta = \phi = 0$

$$\frac{dX}{dT} = \pm 1 \quad (5.53)$$

In questo caso è possibile notare (Fig.5.3) che non vi è deformazione dei coni di luce. Ogni valore di  $r = \text{const}$  fornisce una coppia di rami d'iperbole e per  $r = 2m$  si hanno due asintoti delle iperboli, per  $t = \text{const}$  si hanno rette che passano per l'origine. Le iperboli suddividono il piano in quattro regioni. Le regioni  $I$  ed  $I'$  sono asintoticamente piatte e geometricamente equivalenti. In queste regioni è possibile per un corpo mantenersi ad  $r = \text{const}$ : l'iperbole si trova all'interno del cono di luce, lo stesso non può dirsi

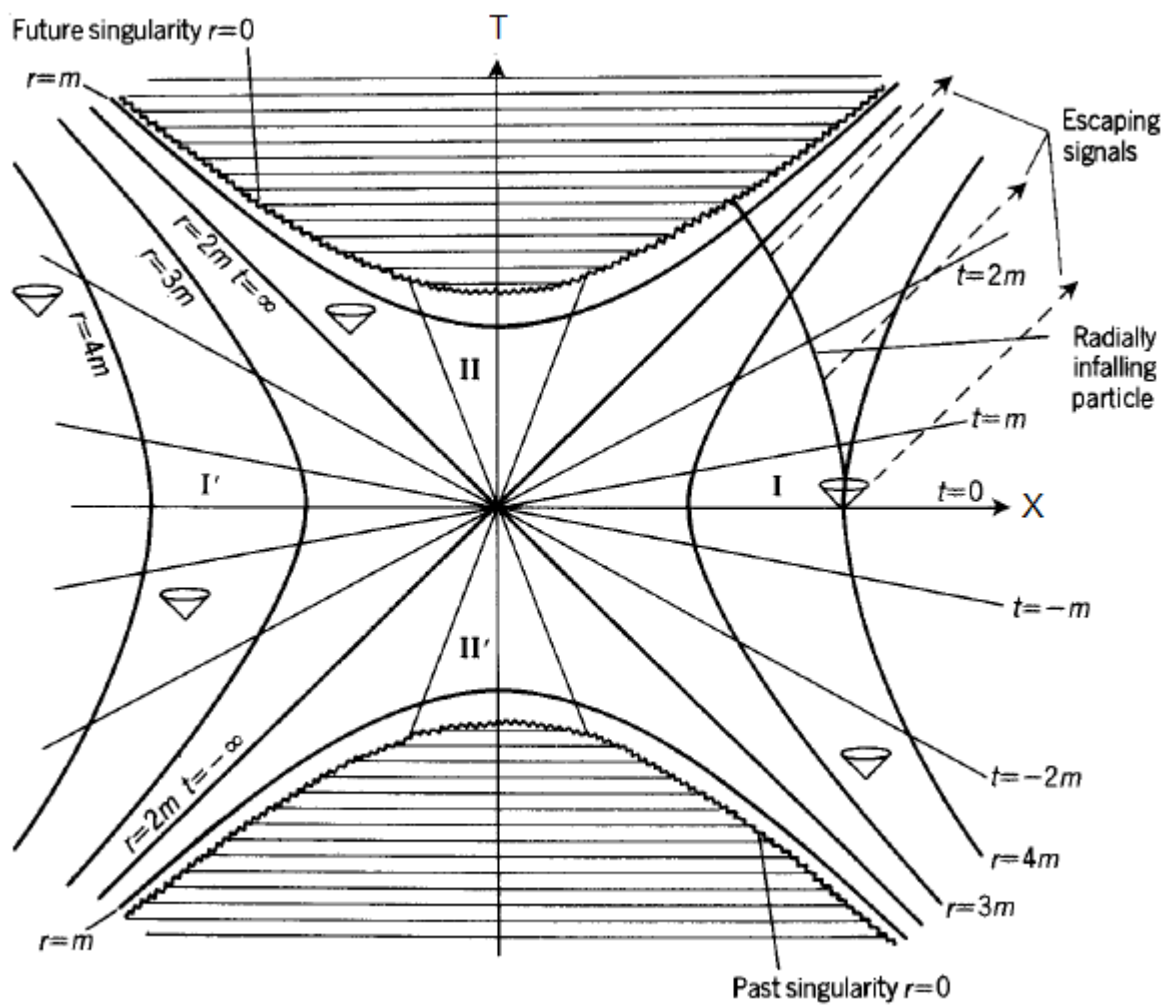


Figura 5.3: Rappresentazione dello spazio-tempo di Schwarzschild in coordinate di Kruskal

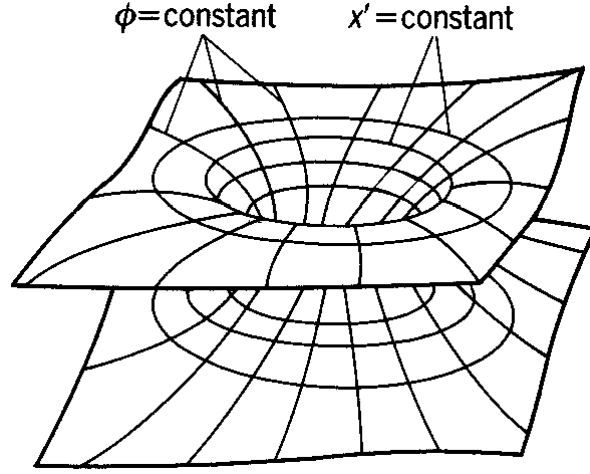


Figura 5.4: Il ponte di Einstein-Rosen

della regione  $II$  dove è impossibile rimanere ad  $r = \text{const}$ , gli unici moti fisici sono quelli aventi  $r$  decrescente. La regione  $II$  viene detta regione di buco nero ed è concettualmente l'opposto della regione  $II'$  che è invece la regione di buco bianco dove i moti fisici hanno tutti  $r$  crescente. La regione di buco bianco fisicamente non risulta stabile: piccole perturbazioni porterebbero alla distruzione dell'oggetto, i buchi bianchi non solo non sono stati mai osservati ma al momento risultano solamente un oggetto teorico dalla dubbia esistenza.

### 5.3 Wormhole

Si consideri la sottovarietà  $T = 0$ , in questo modo l'elemento di linea indotto su tale ipersuperficie è dato da

$$ds^2 = -F^2 dX^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \quad (5.54)$$

Muovendosi lungo l'asse  $X$  da  $+\infty$  a  $-\infty$  il valore di  $r$  diminuisce fino ad un minimo di  $2m$  a  $X = 0$  e risale nuovamente per  $X$  che va a  $-\infty$ . È possibile disegnare una sezione di tale varietà corrispondente al piano  $\theta = \pi/2$ , nel qual caso l'elemento di linea si semplifica ulteriormente

$$ds^2 = -(F^2 dX^2 + r^2 d\phi^2) \quad (5.55)$$

Per interpretarla si consideri una superficie bidimensionale con questo elemento di linea immersa in uno spazio piatto tridimensionale. La superficie appare come in *Fig 5.4*: a  $T = 0$  la varietà di Kruskal è pensabile come due varietà di Schwarzschild distinte ma identiche, asintoticamente piatte ed unite da una "gola", detta ponte di Einstein-Rosen



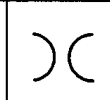
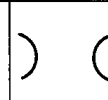
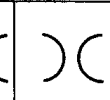
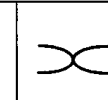
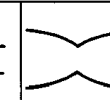
						
$t' < 1$	$t' = -1$	$-1 < t' < 0$	$t' = 0$	$1 < t' < 0$	$t' = 1$	$t' > 1$

Figura 5.5: Evoluzione di un wormhole

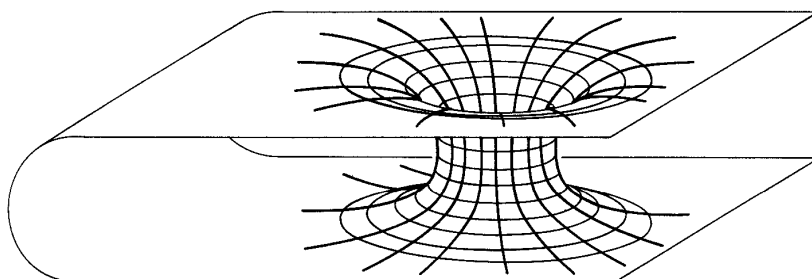


Figura 5.6: Due regioni distanti del medesimo universo connesse da un wormhole

o wormhole, ad  $r = 2m$ . Per  $T$  crescente la gola si restringe e le due varietà di Schwarzschild, o i due universi, si uniscono ad un valore di  $r < 2m$ . A  $T = 1$  la gola si restringe del tutto e gli universi si toccano nella singolarità  $r = 0$ . Per valori maggiori di  $T$ , i due universi, ognuno dei quali contiene la singolarità  $r = 0$ , sono completamente separati. poichè la soluzione di Kruskal è simmetrica rispetto a  $T$ , le medesime configurazioni si verificheranno mandando il tempo all'indietro a partire da  $T = 0$ . L'evoluzione completa è mostrata in *Fig 5.5*. Non è attualmente dato sapere se tale procedura matematica abbia senso fisico. Anche se le equazioni di Einstein fissano la geometria locale dello spazio-tempo, non ne fissano la geometria globale o la topologia. In *Fig 5.6* è possibile osservare una rappresentazione di una sezione a  $T = \text{const}$ , geometricamente uguale ma topologicamente diversa alla precedente. Questo wormhole connette due regioni distanti del medesimo universo asintoticamente piatto.



# Capitolo 6

## La soluzione di de-Sitter

I contenuti di questo capitolo trattanti la soluzione di de Sitter sono tratti da più testi<sup>[2],[3],[4]</sup> La cosmologia moderna studia l'universo nella sua interezza e su scale molto maggiori di quelle intergalattiche. Alla base dello studio cosmologico vi è il

*Principio cosmologico: l'universo è omogeneo ed isotropo su larga scala*

Accanto ad esso si trova un secondo postulato

*Postulato di Weyl: le galassie giacciono nello spazio tempo su una congruenza di geodetiche tipo tempo che divergono da un punto nel passato finito o infinito*

I due postulti consentono la rappresentazione dell'universo quale fluido perfetto. Alle scale della cosmologia l'universo appare come un fluido omogeneo in maniera simile a come appare l'acqua, la quale su piccole scale non è affatto omogenea e le galassie assumono il ruolo di particelle di prova. Il principio cosmologico introduce una seria semplificazione nello studio dei modelli limitandone inoltre il numero, le attuali osservazioni sembrano confermare tale principio.

### 6.1 La metrica Robertson Walker

Le coordinate spaziali  $x^i$  sono le coordinate spaziali di una certa galassia appartenente al fluido cosmologico su cui si pone il sistema di riferimento, in questo modo si ottiene il tempo proprio della galassia

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = g_{00} dt^2 \quad (6.1)$$

è possibile scegliere  $g_{00} = 1$  in modo da misurare il tempo mediante gli "orologi" della galassia. Utilizzando questo tempo è possibile scrivere l'elemento di linea del fluido cosmologico come

$$ds^2 = dt^2 - 2g_{0i} dt dx^i - g_{ij} dx^i dx^j \quad (6.2)$$

Dato il postulato di Weyl  $x^i = \text{const}$  soddisfa l'equazione della geodetica, quindi la parte spaziale di tale equazione è

$$\frac{d^2 x^i}{dt^2} + \Gamma_{\mu\nu}^i \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\nu}{ds} = 0 \quad (6.3)$$

di conseguenza

$$\Gamma_{00}^i \frac{dx^0}{ds} \frac{dx^0}{ds} = 0 \quad (6.4)$$

il che si traduce in  $\Gamma_{00}^i = 0$ , il termine di Christoffel può essere riscritto mediante la (4.16)

$$\Gamma_{00}^i = \frac{1}{2} g^{i\alpha} (g_{0\alpha,0} + g_{0\alpha,0} - g_{00,\alpha}) = g^{ij} g_{0j,0} = 0 \quad (6.5)$$

la quale si riduce a  $g_{0j,0} = 0$  di conseguenza il termine misto della metrica è funzione delle sole coordinate spaziali ed indipendente dal tempo. Se si esegue la seguente trasformazione

$$\begin{cases} t' = t + f(x^i) \\ x'^i = x^i \end{cases} \quad (6.6)$$

tale trasformazione non modifica la misura del tempo infatti poichè

$$g'^{\mu\nu} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\nu} g_{\alpha\beta} \quad (6.7)$$

si evince che  $g'_{00} = g_{00} = 1$ . E' possibile eliminare il termine misto che si trasforma come

$$g'_{ti} = g_{ti}(x^i) + \frac{\partial f(x^i)}{\partial x^i} \quad (6.8)$$

mediante un opportuna scelta della funzione  $f$ . Data l'omogenità ed isotropia dell'universo è possibile fattorizzare la dipendenza temporale della parte spaziale della metrica, in questo modo è possibile scrivere l'elemento di linea come

$$ds^2 = dt^2 + S^2(t) g_{ij}^{(3)} dx^i dx^j \quad (6.9)$$

dove  $g_{ij}^{(3)}$  è una metrica 3x3 che descrive la componente spaziale dell'universo omogeneo ed isotropo. La curvatura sulle superfici a  $t = \text{const}$  non può dipendere dal punto e deve dunque essere costante, tale condizione è espressa dall'equazione

$$R_{abcd} = K \left( g_{ac}^{(3)} g_{bd}^{(3)} - g_{cd}^{(3)} g_{ab}^{(3)} \right) \quad (6.10)$$

Contraendo l'equazione con la metrica 3x3 si ottiene

$$g^{(3)ac} R_{abcd} = K g^{(3)ac} \left( g_{ac}^{(3)} g_{bd}^{(3)} - g_{cd}^{(3)} g_{ab}^{(3)} \right) = R_{bd}^{(3)} = K \left[ 3g_{bd}^{(3)} - g_{bd}^{(3)} \right] = 2K g_{bd}^{(3)} \quad (6.11)$$

E' possibile sfruttare questo risultato per ricavare la metrica spaziale. In un generico punto lo spazio avrà simmetria sferica ed il più generale elemento di linea spaziale è dato da

$$dl^2 = e^{\lambda(r)} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \quad (6.12)$$

Le componenti non nulle del tensore di Ricci sono:

$$\begin{cases} R_{rr}^{(3)} = \frac{\lambda'}{r} \\ R_{\theta\theta}^{(3)} = 1 + \frac{1}{2}re^{-\lambda}\lambda' - e^{-\lambda} \\ R_{\phi\phi}^{(3)} = \csc^2\theta \end{cases} \quad (6.13)$$

Dove  $\lambda' = d\lambda/dr$ . Le condizioni per uno spazio a curvatura costante si riducono a

$$\begin{cases} \frac{\lambda'}{r} = 2Ke^\lambda \\ 1 + \frac{1}{2}re^{-\lambda}\lambda' - e^{-\lambda} = 2Kr^2 \end{cases} \quad (6.14)$$

la cui soluzione è

$$e^{-\lambda} = 1 - Kr^2 \quad (6.15)$$

di conseguenza l'elemento di linea spaziale risulterà essere

$$dl^2 = \frac{dr^2}{1 - Kr^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \quad (6.16)$$

Di conseguenza l'elemento di linea sarà

$$ds^2 = dt^2 - S^2(t) \left[ \frac{dr^2}{1 - Kr^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \right] \quad (6.17)$$

Se  $K \neq 0$  si definisce  $k = K/|K|$  e si pone  $r^* = |K|^{1/2}r$  in questo modo è possibile scrivere

$$ds^2 = dt^2 - \frac{S^2(t)}{|K|} \left[ \frac{dr^{*2}}{1 - kr^{*2}} + r^{*2}(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \right] \quad (6.18)$$

Si definisce poi

$$\begin{cases} R(t) = \frac{S(t)}{|K|^{1/2}} & K \neq 0 \\ R(t) = S(t) & K = 0 \end{cases} \quad (6.19)$$

in tal modo si ottiene

$$ds^2 = dt^2 - R^2(t) \left[ \frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \right] \quad (6.20)$$

dove si è scritto  $r$  al posto di  $r^*$  e dove  $k = -1, 0, 1$  è un parametro libero del modello e specifica la geometria dell'universo. La (6.20) è nota come metrica Robertson-Walker. Se  $k = 0$  si riottiene uno spazio piatto con metrica euclidea

$$ds^2 = dt^2 - R^2(t)[dx^2 + dy^2 + dz^2] \quad (6.21)$$

Per  $k = 1$  la metrica appare singolare per  $r = \pm 1$ , tuttavia introducendo una nuova coordinata  $\chi$  tale che  $r = \sin\chi$  è possibile scrivere

$$dr = \cos\chi d\chi = (1 - r^2)^{1/2} d\chi \quad (6.22)$$

in tale maniera la parte spaziale della metrica diviene

$$dl^2 = R_0^2 [d\chi^2 + \sin^2\chi (d\theta^2 + d\phi^2)] \quad (6.23)$$

E' possibile immaginare l'immersione di tale 3-superficie in uno spazio euclideo quadrimensionale mediante la trasformazione

$$\begin{cases} w = R_0 \cos\chi \\ x = R_0 \sin\chi \sin\theta \cos\phi \\ y = R_0 \sin\chi \sin\theta \sin\phi \\ z = R_0 \sin\chi \cos\theta \end{cases} \quad (6.24)$$

Così facendo l'elemento di linea appare come

$$dl^2 = dw^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 \quad (6.25)$$

inoltre è possibile scrivere

$$w^2 + x^2 + y^2 + z^2 = R_0^2 \quad (6.26)$$

che mostra come la superficie possa essere pensata come una sfera tridimensionale immersa in uno spazio euclideo quadrimensionale. Infine se  $k = -1$  si presenterà una geometria iperbolica: ponendo  $r = \sinh\chi$  l'elemento di linea diviene

$$dl^2 = R_0^2 [d\chi^2 + \sinh^2\chi (d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)] \quad (6.27)$$

E' possibile osservare che tale struttura rappresenta una geometria iperbolica ed è possibile immergerla in uno spazio minkowskiano mediante la seguente trasformazione

$$\begin{cases} w = R_0 \cosh\chi \\ x = R_0 \sinh\chi \sin\theta \cos\phi \\ y = R_0 \sinh\chi \sin\theta \sin\phi \\ z = R_0 \sinh\chi \cos\theta \end{cases} \quad (6.28)$$

## 6.2 Dinamica dell'universo

Per indagare la dinamica dell'universo è fondamentale partire dallo studio dell'equazione di Einstein

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} - \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu} \quad (6.29)$$

dove si assume

$$T_{\mu\nu} = (p + \rho)u_\mu u_\nu - pg_{\mu\nu} \quad (6.30)$$

il quale è il tensore energia-impulso per un fluido perfetto dove  $p = p(t)$  e  $\rho = \rho(t)$  in ossequio all'omogeneità ed isotropia dell'universo. Ponendosi in un sistema comoviente con il fluido si ha che  $u^\mu = (1, 0, 0, 0)$  e le equazioni di campo portano ad una coppia di equazioni indipendenti

$$\begin{cases} 3\frac{\dot{R}+k}{R^2} - \Lambda = 8\pi\rho \\ \frac{2R\dot{R}+\dot{R}^2+k}{R^2} - \Lambda = -8\pi p \end{cases} \quad (6.31)$$

Derivando la prima equazione del sistema nel tempo e combinandola con la seconda si ottiene

$$\dot{\rho} + 3p\frac{\dot{R}}{R} = -\frac{3}{8\pi}\frac{\dot{R}}{R}\left(\frac{3\dot{R}^2}{R^2} + \frac{3k}{R^2} - \Lambda\right) = -3\rho\frac{\dot{R}}{R} \quad (6.32)$$

Moltiplicando tale equazione per  $R^3$  la si può riscrivere nella forma

$$\frac{d}{dt}(\rho R^3) + p\frac{d}{dt}(R^3) = 0 \quad (6.33)$$

Tale equazione, se si considera un volume  $V \sim R^3(t)$  e si indica la massa-energia totale come  $E = \rho V$ , può essere riscritta come

$$dE + p dV = 0 \quad (6.34)$$

La quale è di fatto la legge di conservazione dell'energia. Nelle suddette equazioni la pressione comprende tutti i tipi di pressione possibili come quella dovuta al moto casuale delle stelle, quella dovuta al moto termico delle molecole e la pressione di radiazione. All'epoca attuale la densità di energia dovuta alla materia è un termine molto più importante rispetto alla pressione la quale può essere esclusa dall'equazione, almeno finchè si considerano stati dell'universo simili a quello odierno. In tal caso si può facilmente integrare la seconda equazione del sistema (6.31) ed ottenere

$$\dot{R}^2 + k - \frac{1}{3}\Lambda R^2 = \frac{8}{3}\pi R^2 \rho \quad (6.35)$$

Questa è detta equazione di Friedmann per il fattore di scala.

### 6.3 Il modello di de Sitter

Il modello di de Sitter riveste un importanza storica nonostante sia privo di materia e di conseguenza non sia un modello di cosmologia relativistica. Si ottiene ponendo  $p = \rho = k = 0$  di conseguenza l'equazione di Friedmann si riduce a

$$\frac{3\dot{R}}{R^2} - \Lambda = 0 \quad (6.36)$$

da cui mediante l'integrazione si ottiene

$$R(t) = \exp \left[ \left( \frac{1}{3} \Lambda \right)^{\frac{1}{2}} t \right] \quad (6.37)$$

L'elemento di linea di de Sitter risulta essere

$$ds^2 = dt^2 - \exp \left[ 2 \left( \frac{\Lambda}{3} \right)^{\frac{1}{2}} t \right] [dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)] \quad (6.38)$$

Questa soluzione, scoperta nel 1917, fornì un esempio di soluzione dell'equazione di Einstein nel vuoto con l'aggiunta del termine cosmologico. Nonostante la sua semplicità il modello ha un'importanza pratica oltre che storica infatti esso è un'ottima approssimazione del giovane universo e molti modelli inflazionari sono approssimativamente dei modelli di de Sitter.

## 6.4 Soluzione di de Sitter

La soluzione di de Sitter può essere vista, più in generale, come soluzione dell'equazione di Einstein nel vuoto con l'aggiunta del termine cosmologico. Se si contrae mediante la metrica  $g^{\mu\nu}$  l'equazione di Einstein nel vuoto ( $T_{\mu\nu} = 0$ )

$$g^{\mu\nu} \left[ R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} \right] = 0 \quad (6.39)$$

si ottiene la relazione  $R = 4\Lambda$  la quale, sostituita nuovamente nell'equazione di Einstein, fornisce

$$R_{\mu\nu} = \Lambda g_{\mu\nu} \quad (6.40)$$

la quale evidenzia come anche in assenza di materia esista una curvatura non nulla. Se si considera il contributo cosmologico il sistema (5.19) diviene

$$\begin{cases} e^{-\lambda} \left( \frac{\lambda'}{r} - \frac{1}{r^2} \right) + \frac{1}{r^2} = \Lambda \\ e^{-\lambda} \left( \frac{\lambda'}{r} + \frac{1}{r^2} - \frac{1}{r^2} \right) = \Lambda \\ \dot{\lambda} = 0 \end{cases} \quad (6.41)$$

La prima equazione di tale sistema può essere riscritta come

$$\frac{d}{dr} = (re^{-\lambda}) (1 - \Lambda r^2) \quad (6.42)$$

integrando si ottiene

$$e^{-\lambda} = 1 - \frac{\Lambda}{3} r^2 + \frac{const}{r} \quad (6.43)$$

La soluzione di de Sitter è soluzione dell'equazione di Einstein nel vuoto ovunque, si pone dunque pari a zero la costante d'integrazione. Così facendo si ottiene l'elemento di linea

$$ds^2 = \left(1 - \frac{\Lambda r^2}{3}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{\Lambda r^2}{3}\right)^{-1} dr^2 - r^2 (d\theta^2 + d\phi^2) \quad (6.44)$$

La quale descrive appunto uno spazio-tempo vuoto con un contributo cosmologico spesso interpretato come energia oscura.

La metrica è singolare per  $r = \sqrt{3/\Lambda}$ . Per rimuoverla è possibile costruire un opportuno sistema di coordinate, similmente a quanto è stato fatto per la soluzione di Schwarzschild. Le geodetiche radiali nulle sono ottenute ponendo  $ds^2 = d\theta^2 = d\phi^2 = 0$

$$\frac{dr}{dt} = \pm \frac{1}{1 - \frac{\Lambda}{3}r^2} = \pm \left(1 - \sqrt{\frac{\Lambda r}{3}}\right)^{-1} \left(1 + \sqrt{\frac{\Lambda r}{3}}\right)^{-1} \quad (6.45)$$

Integrata tale equazione frinisce

$$t = \pm \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{\Lambda}} \ln \left( \frac{1 + \sqrt{\Lambda/3}r}{1 - \sqrt{\Lambda/3}r} \right) + const \quad (6.46)$$

Il segno  $+$  è riferito alle geodetiche radiali uscenti, il segno meno è riferito invece alle geodetiche radiali negative. Considerando il segno meno ( $r > \sqrt{3/\Lambda}$ ) si costruiscono le coordinate avanzate:

$$t \rightarrow v = t + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{\Lambda}} \ln \left( \frac{1 + \sqrt{\Lambda/3}r}{1 - \sqrt{\Lambda/3}r} \right) \quad (6.47)$$

da cui

$$dv = dt + \left(1 - \frac{\Lambda}{3}r^2\right)^{-1} dr \quad (6.48)$$

Applicando la suddetta trasformazione l'elemento di linea (6.44) diventa

$$ds^2 = \left(1 - \frac{\Lambda}{3}r^2\right) dv^2 - 2dvdr - r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \quad (6.49)$$

Similmente considerando il segno  $+$  si introducono le coordinate ritardate

$$t \rightarrow w = t - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{\Lambda}} \ln \left( \frac{1 + \sqrt{\Lambda/3}r}{1 - \sqrt{\Lambda/3}r} \right) \quad (6.50)$$

da cui

$$dw = dt - \left(1 - \frac{\Lambda}{3}r^2\right)^{-1} dr^2 \quad (6.51)$$

In questo modo l'elemento di linea diventa

$$ds^2 = \left(1 - \frac{\Lambda}{3}r^2\right) dw^2 + 2dwdr - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \quad (6.52)$$

Come per la soluzione di Schwarzschild è possibile unire le coordinate: sommando la (6.48) e la (6.51) si ottiene

$$dt = \frac{1}{2}(dv + dw) \quad (6.53)$$

sottraendo le due invece si ottiene

$$\frac{dr}{1 - \frac{\Lambda}{3}r^2} = \frac{1}{2}(dv - dw) \quad (6.54)$$

Integrando tale espressione si ottiene

$$r = \sqrt{\frac{\Lambda}{3}} \tanh\left(\sqrt{\frac{\Lambda}{3}} \frac{v - w}{2}\right) \quad (6.55)$$

In questo modo l'elemento di linea si scrive

$$ds^2 = \left(1 - \frac{\Lambda}{3}r^2\right) dvdw - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \quad (6.56)$$

Mantenendo l'analogia con il procedimento utilizzato per la soluzione di Schwarzschild si può passare alle coordinate di Kruskal

$$\begin{cases} R = e^{-\sqrt{\Lambda/3}v} \\ W = e^{\sqrt{\Lambda/3}w} \end{cases} \quad (6.57)$$

In questo modo la (6.55) diventa

$$r = \sqrt{\frac{3}{\Lambda}} \frac{1 + RW}{1 - RW} \quad (6.58)$$

mentre l'elemento di linea risulta

$$ds^2 = \frac{3}{\Lambda} \frac{1}{(1 - RW)^2} (4dRdW - (1 + RW)^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)) \quad (6.59)$$

La forma più conveniente ai nostri scopi, che verrà utilizzata nei prossimi capitoli, è ottenibile mediante l'uso delle coordinate Gibbons-Hawking

$$U = \frac{1}{2}(R + W) \quad V = \frac{1}{2}(R - W) \quad (6.60)$$



Con tali coordinate si ottiene l'elemento di linea

$$ds^2 = \frac{3}{\Lambda} \left( 1 + \sqrt{\frac{\Lambda}{3}} r \right)^2 (dU^2 - dV^2) \quad (6.61)$$

Il legame con  $r$  è dato dalla relazione

$$U^2 - V^2 = -\frac{1 - \sqrt{\Lambda/3}r}{1 + \sqrt{\Lambda/3}r} \quad (6.62)$$

La soluzione di de Sitter corrisponde ad un spazio di curvatura costante avente  $R > 0$ . Il modo più semplice di visualizzare lo spazio-tempo di de-Sitter è mediante l'iperboloide

$$-v^2 + w^2 + x^2 + y^2 + z^2 = \alpha^2 \quad (6.63)$$

nello spazio penta-dimensionale  $\mathbb{R}^5$ . E' possibile introdurre un sistema di coordinate sull'iperboloide mediante le seguenti relazioni

$$\begin{cases} \alpha \sinh(\alpha^{-1}t) = v \\ \alpha \cosh(\alpha^{-1}t) \cos\chi = w \\ \alpha \cosh(\alpha^{-1}t) \sin\chi \cos\theta = x \\ \alpha \cosh(\alpha^{-1}t) \sin\chi \sin\theta \cos\phi = y \\ \alpha \cosh(\alpha^{-1}t) \sin\chi \sin\theta \sin\phi = z \end{cases} \quad (6.64)$$

Mediante l'uso di tale sistema di coordinate la metrica assume la forma

$$ds^2 = dt^2 - \alpha^2 \cosh^2(\alpha^{-1}t) [d\chi^2 + \sin^2\chi (d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)] \quad (6.65)$$

Le singolarità della metrica per  $\chi = 0, \chi = \pi, \theta = 0$  e  $\theta = \pi$  sono dovute alla scelta del sistema di coordinate, esattamente come accadde per le coordinate polari. A parte i punti singolari l'iperboloide è coperto dall'intervallo di coordinate

$$\begin{cases} -\infty < t < \infty \\ 0 \leq \chi \leq \pi \\ 0 \leq \theta \leq \pi \\ 0 \leq \phi \leq 2\pi \end{cases} \quad (6.66)$$

Le sezioni spaziali per  $t = \text{const}$  sono delle 3-sfere a curvatura costante, le particelle di prova si muovono lungo geodetiche normali a tali spazi le quali si contraggono fino ad

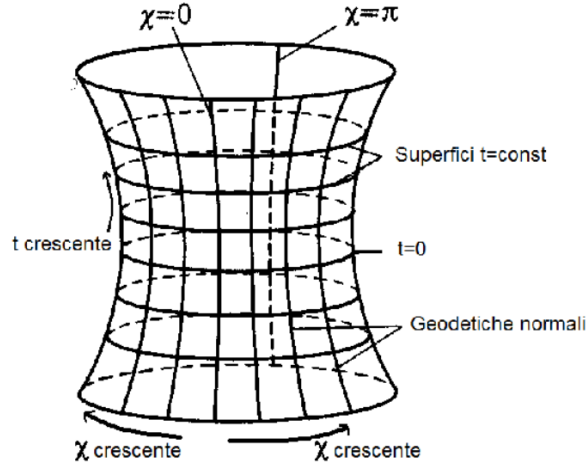


Figura 6.1: Lo spazio-tempo di de Sitter può essere descritto come un iperboloide immerso in uno spazio pentadimensionale. E' possibile notare che il sistema di coordinate  $(t, \chi, \theta, \phi)$  copre l'intero iperboloide

una separazione spaziale minima ( per  $t = 0$  ) per poi riespandersi all'infinito. E' possibile introdurre un ulteriore sistema di coordinate

$$\begin{cases} \hat{t} = \alpha \log \frac{w+v}{\alpha} \\ \hat{x} = \frac{\alpha x}{w+v} \\ \hat{y} = \frac{\alpha y}{w+v} \\ \hat{z} = \frac{\alpha z}{w+v} \end{cases} \quad (6.67)$$

Mediante l'uso di tali cordinate l'elemento di linea è

$$ds^2 = d\hat{t}^2 - \exp(2\alpha^{-1}\hat{t}) [d\hat{x}^2 + d\hat{y}^2 + d\hat{z}^2] \quad (6.68)$$

Si può notare come (6.38) sia equivalente a quest'ultima se espressa in coordinate polari e per  $\alpha = (3/\Lambda)^{1/2}$ . Il suddetto sistema di coordinate tuttavia non copre l'intero iperboloide in quanto  $\hat{t}$  non è definito per  $w + v \leq 0$ . La regione dello spazio di de Sitter per cui  $v + w \geq 0$  forma lo spazio-tempo del modello di universo stazionario. In tale modello, proposto come alternativa al Big Bang, le particelle di prova si muovono lungo le geodetiche normali alle superfici  $\hat{t} = const$ , man mano che l'universo si espande viene creata nuova materia in modo da mantenere costante la densità totale.

Infine vi è un ulteriore imporatante sistema di coordinate dette statiche definite nel

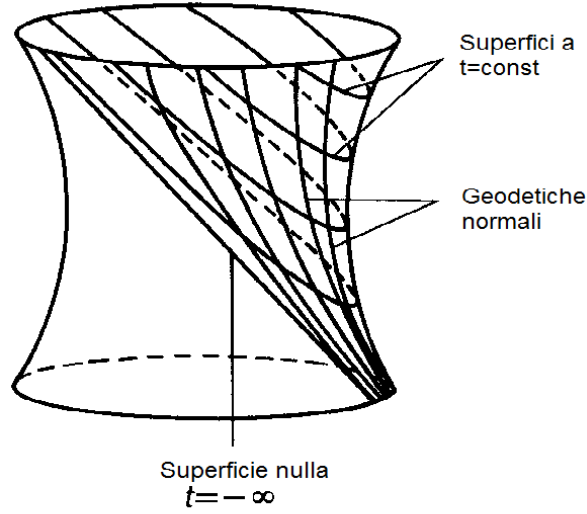


Figura 6.2: Le coordinate  $\hat{t}, \hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$  coprono solo metà dell' iperboloide, le superfici  $t = \text{const}$  sono 3-spazi piatti le cui geodetiche normali divergono da un punto all'infinito nel passato

seguinte modo

$$\begin{cases} v = (\alpha^2 - r^2)^{\frac{1}{2}} \sinh(t/\alpha) \\ w = (\alpha^2 - r^2)^{\frac{1}{2}} \cosh(t/\alpha) \\ x = r \sin \theta \cos \phi \\ y = r \sin \theta \sin \phi \\ z = r \cos \theta \\ 0 < r < \infty \end{cases} \quad (6.69)$$

le quali coprono la metà dell'iperboloide per cui  $v + w > 0$ . Utilizzando tali coordinate l'elemento di linea diviene

$$ds^2 = \left[ 1 - \left( \frac{r^2}{\alpha^2} \right) \right] dt^2 - \left[ 1 - \left( \frac{r^2}{\alpha^2} \right) \right]^{-1} dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \quad (6.70)$$

Tale elemento di linea risulta singolare per  $r = \alpha$ , il quale corrisponde all'orizzonte degli eventi per un osservatore situato in  $r = 0$ . Nell'eventualità che  $\alpha^2 = 3/\Lambda$  l'elemento di linea 6.70 coincide con quello di (6.44)

A fianco dello spazio-tempo di de Sitter è possibile aggiungerne un secondo, detto spazio-tempo anti de Sitter. Lo spazio-tempo anti de Sitter è anch'esso soluzione simmetrica dell'equazione di Einstein con l'aggiunta del termine cosmologico, in questo

caso tuttavia la curvatura è negativa e costante ( $R > 0$ ). Tale soluzione può essere rappresentata tramite l'iperboloide

$$-u^2 - v^2 + x^2 + y^2 + z^2 = 1 \quad (6.71)$$

nello spazio euclideo pentadimensionale  $\mathbb{R}^5$ . In questo spazio esistono curve di tipo-tempo chiuse le quali tuttavia possono essere eliminate sopprimendo una dimensione tipo-tempo ottenendo così il ricoprimento universale dello spazio-tempo anti de Sitter il quale ha la topologia di  $\mathbb{R}^4$ . Questo spazio può essere rappresentato dalla metrica

$$ds^2 = dt^2 - \cos^2 t [d\chi^2 + \sinh^2 \chi (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)] \quad (6.72)$$

Tale sistema di coordinate non copre l'intero spazio, il ricoprimento completo può essere ottenuto utilizzando le coordinate  $(t', r, \theta, \phi)$  dove  $t' = \text{artg}[\exp(t)] - \pi/2$

$$ds^2 = \cosh^2 r dt'^2 - dr^2 + \sinh^2 r (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \quad (6.73)$$

In tale forma, lo spazio è coperto dalle superfici  $t' = \text{const}$  le cui normali non sono geodetiche.

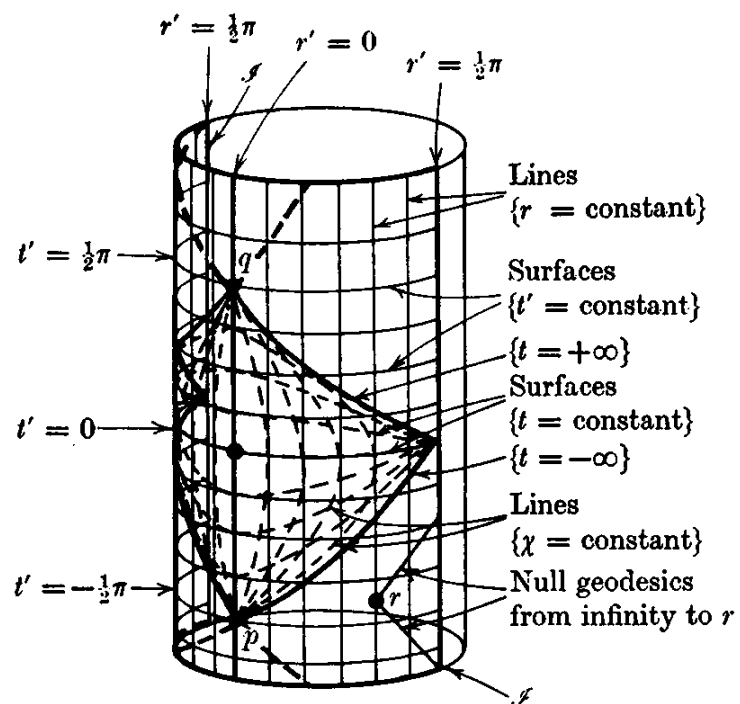


Figura 6.3: Lo spazio-tempo anti de Sitter, mentre le coordinate  $(t', r, \theta, \phi)$  coprono l'intero spazio le coordinate  $(t, \chi, \theta, \phi)$  copre solo una regione a forma di diamante

# Capitolo 7

## Diagrammi di Penrose

In questo capitolo, seguendo il procedimento proposto da R. d’Inverno<sup>[2]</sup>, si espone il concetto di diagramma di Penrose. Il diagramma di Penrose è un diagramma bidimensionale che permette di visualizzare facilmente le relazioni causali di punti diversi dello spazio-tempo. I diagrammi di Penrose sono un’estensione dei diagrammi di Minkowski, la principale differenza delle due rappresentazioni è che i diagrammi di Penrose risultano essere conformemente equivalenti alla metrica reale dello spazio-tempo. Una mappa conforme è semplicemente una trasformazione che conserva gli angoli tra le curve, tuttavia non mantiene necessariamente le dimensioni.

### 7.1 Diagramma di Penrose per lo spazio-tempo di Minkowski

La costruzione del diagramma di Penrose per lo spazio-tempo di Minkowski fungerà da prototipo per la costruzione di altre soluzioni. Essenzialmente, partendo da una metrica  $g_{\mu\nu}$ , detta fisica, è possibile costruirne una seconda ( $\bar{g}_{\mu\nu}$ ) conformemente collegata alla prima secondo l’equazione

$$\bar{g}_{\mu\nu} = \Omega^2 g_{\mu\nu} \quad (7.1)$$

in cui  $\Omega$  è detto fattore conforme. Il fattore conforme può essere scelto in modo tale che l’intero spazio-tempo all’infinito venga racchiuso in un diagramma finito fornendo dunque la possibilità di studiare la struttura causale dell’infinito. All’atto pratico per avvicinare i punti all’infinito si utilizzano trasformazioni che includano funzioni quali  $tg^{-1}x$  le quali mappano l’intervallo infinito  $[-\infty, +\infty]$  nell’intervallo finito  $[-\pi/2, +\pi/2]$ .

Utilizzando le coordinate nulle

$$\begin{cases} v = t + r \\ w = t - r \end{cases} \quad (7.2)$$

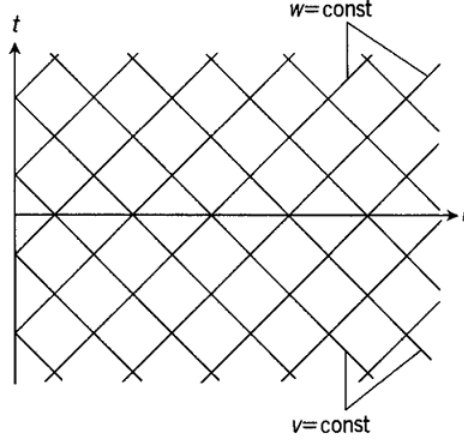


Figura 7.1: Diagramma dello spazio-tempo di Minkowski

l'elemento di linea dello spazio-tempo di Minkowski è

$$ds^2 = dv dw - \frac{1}{4}(v - w)^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \quad (7.3)$$

Combinando le equazioni del sistema (7.2) segue che  $r = 1/2(v - w)$  e dunque l'estensione delle coordinate  $-\infty < t < \infty, 0 \leq r < \infty$  diviene  $-\infty < v < \infty, -\infty < w < \infty$  con la condizione

$$r \geq 0 \implies v - w \geq 0 \implies v \geq w \quad (7.4)$$

Mediante l'uso di tali coordinate il diagramma dello spazio-tempo appare come in *Fig. 7.1*. Introducendo le coordinate

$$\begin{cases} p = tg^{-1}v \\ q = tg^{-1}w, \end{cases} \quad (7.5)$$

le quali spaziano negli intervalli  $-\pi/2 < p < \pi/2, -\pi/2 < q < \pi/2$  e per le quali vale la condizione  $p \geq q$ , l'elemento di linea diviene

$$ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu = \frac{1}{4}\sec^2 p \sec^2 q [4dpdq - \sin^2(p - q)(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)] \quad (7.6)$$

L'elemento di linea non fisico invece è

$$d\bar{s}^2 = \bar{g}_{\mu\nu}d\bar{x}^\mu d\bar{x}^\nu = 4dpdq - \sin^2(p - q)(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \quad (7.7)$$

infine il fattore conforme è

$$\frac{1}{4}\sec^2 p \sec^2 q \quad (7.8)$$

Si introducono le coordinate

$$\begin{cases} t' = p + q \\ r' = p - q \end{cases} \quad (7.9)$$

il cui intervallo è

$$\begin{cases} -\pi < t' + r' < \pi \\ -\pi < t' - r' < \pi \\ r' \geq 0 \end{cases} \quad (7.10)$$

L'elemento di linea non fisico risulta ora essere

$$d\bar{s}^2 = dt'^2 - dr'^2 - \sin^2 r' (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \quad (7.11)$$

Tale elemento di linea corrisponde all'universo statico di Einstein, un modello cosmologico introdotto nel tentativo di adattare il modello fisico dell'universo alle concezioni culturali dell'epoca. La topologia di tale soluzione è cilindrica con l'asse temporale che giace sulle generatrici del cilindro. Le sezioni del cilindro rappresentano lo spazio a  $t' = \text{const}$  ed hanno la topologia di una 3-sfera. L'estensione delle coordinate della varietà risulta essere

$$\begin{cases} -\infty < t' < \infty \\ 0 \leq r' \leq \pi \\ 0 \leq \theta \leq \pi \\ -\pi < \phi < \pi \end{cases} \quad (7.12)$$

dove  $r' = 0$ ,  $\pi$  e  $\theta = 0, \pi$  sono i punti singolari del sistema di coordinate. Tale soluzione può essere immersa come il cilindro

$$x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = 1 \quad (7.13)$$

in uno spazio piatto a cinque dimensioni più ampio avente elemento di linea

$$ds^2 = dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 - dw^2 \quad (7.14)$$

Sopprimendo due dimensioni è possibile fornirne una rappresentazione visiva, l'estensione delle coordinate (7.10) copre una regione di cilindro (l'universo statico di Einstein) a forma di diamante evidenziata in figura (7.2). La totalità dello spazio-tempo di Minkowski è stato compattificato in una regione finita, tale processo viene detto compattificazione conforme e non modifica la struttura causale della varietà di partenza. Il bordo della regione rappresenta la struttura conforme dell'infinito per lo spazio-tempo di Minkowski. In termini delle coordinate  $p, q$  il bordo è costituito dalle seguenti sotto varietà

$$\begin{cases} \text{una superficie nulla } p = \frac{1}{2}\pi & \text{denominata } \mathfrak{S}^+ \\ \text{una superficie nulla } q = \frac{1}{2}\pi & \text{denominata } \mathfrak{S}^- \\ \text{un punto } (p = \frac{1}{2}\pi, q = \frac{1}{2}\pi) & \text{denominata } i^+ \\ \text{un punto } (p = \frac{1}{2}\pi, q = -\frac{1}{2}\pi) & \text{denominata } i^0 \\ \text{un punto } (p = -\frac{1}{2}\pi, q = -\frac{1}{2}\pi) & \text{denominata } i^- \end{cases} \quad (7.15)$$



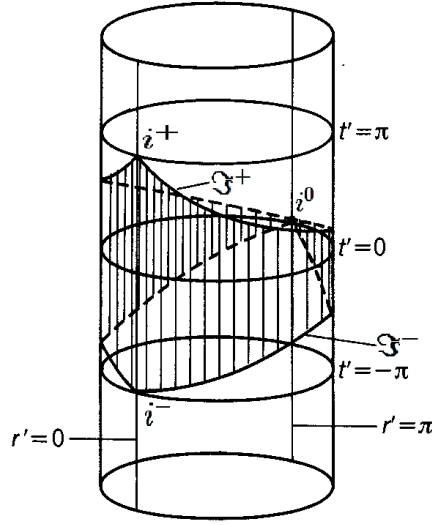


Figura 7.2: Lo spazio-tempo di Minkowski compattificato, due dimensioni sono state sopprese

E' possibile dimostrare che le geodetiche di tipo-tempo hanno origine in  $i^-$  e terminano in  $i^+$ , le geodetiche di tipo-spazio si originano in  $S^-$  e finiscono in  $S^+$ , infine le geodetiche tipo-spazio iniziano e finiscono in  $i^0$ , tali relazioni sono mostrate nella figura (7.3). Di conseguenza  $i^-$  e  $i^+$  rappresentano l'infinito di tipo-tempo passato e futuro,  $S^-$  e  $S^+$  rappresentano l'infinito nullo passato e futuro e  $i^0$  rappresenta l'infinito di tipo-spazio passato e futuro.

Esiste poi un ulteriore possibilità di rappresentazione della struttura causale dell'infinito data dal diagramma di Penrose (Fig 7.3). In tale diagramma sono rappresentate le curve  $r = \text{const}$  le quali rappresentano le storie di 2-sfere e le curve  $t = \text{const}$  le quali

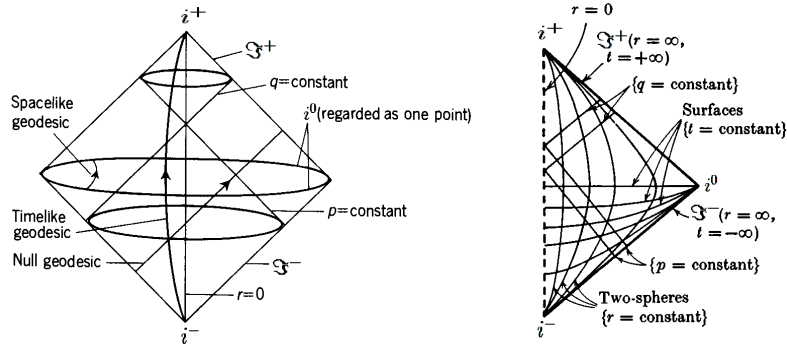


Figura 7.3: Origine e termine delle geodetiche (sinistra), il diagramma di Penrose dello spazio-tempo di Minkowski: ogni punto, a parte  $i^-, i^+, i^0$  è una 2-sfera

rappresentano le curve tipo spazio, infine le geodetiche nulle sono rappresentate da linee rette inclinate di  $\pm 45$  gradi definite da  $p = \text{const}$  e  $q = \text{const}$

## 7.2 Diagramma di Penrose per la soluzione di Kruskal

Con un procedimento molto simile a quello utilizzato nel caso dello spazio-tempo di Minkowski è possibile studiare la struttura causale dell'infinito per la soluzione di Kruskal. La compattazione conforme della soluzione di Kruskal può essere ottenuta definendo nuove coordinate nulle a partire dalle coordinate  $U, V$  introdotte nella sezione 5.2.

$$U' = tg^{-1} \left[ \frac{U}{\sqrt{2m}} \right] \quad V' = tg^{-1} \left[ \frac{V}{\sqrt{2m}} \right] \quad (7.16)$$

Tali coordinate spaziano negli intervalli

$$\begin{cases} -\frac{1}{2}\pi < U' < \frac{1}{2}\pi \\ -\frac{1}{2}\pi < V' < \frac{1}{2}\pi \\ -\pi < U' + V' < \pi \end{cases} \quad (7.17)$$

Utilizzando il suddetto sistema di coordinate l'elemento di linea fisico (5.51) risulta

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = 64 \frac{m^4 e^{-r/2m}}{r (\cos^2 U' \cos^2 V')^2} dU' dV' - r^2 (d\theta^2 + \cos^2 \theta d\phi^2) \quad (7.18)$$

L'elemento di linea della metrica non fisica è

$$d\bar{s}^2 = \frac{16m^4}{r} \frac{e^{-r/2m}}{\cos^2 U' \cos^2 V'} \left[ 4dU dV - \frac{r^3 \cos^2 U' \cos^2 V' e^{r/2m}}{16m^4} (d\theta^2 + \cos^2 \theta d\phi^2) \right] \quad (7.19)$$

con il fattore conforme che vale

$$\Omega^2 = \frac{r (\cos U' \cos V')^2 e^{r/2m}}{16m^4} \quad (7.20)$$

Il diagramma di Penrose mostra quattro diverse regioni e due singolarità, ogni punto del diagramma è una 2-sfera *Fig. 7.4*. Le regioni *I* e *I'* sono asintoticamente piatte e non connesse causalmente. Se si considera il cono di luce futuro di qualsiasi punto esterno a  $r = 2m$  (regioni *I, I'*) le geodetiche uscenti raggiungono l'infinito mentre quelle entranti raggiungono la singolarità futura. Viceversa se il punto si trova all'interno della regione  $r = 2m$  (regione *II*) entrambe le geodetiche raggiungeranno la singolarità futura. Come si era detto nel capitolo 5, la regione *II* è detta regione di buco nero ed una volta che un punto supera  $r = 2m$  non potrà uscirne. Se si considera una 2-sfera  $S_0$  nella regione *I* si può notare che (*Fig. 7.4*) i fotoni che si propagano da essa formeranno altre 2-sfere ed

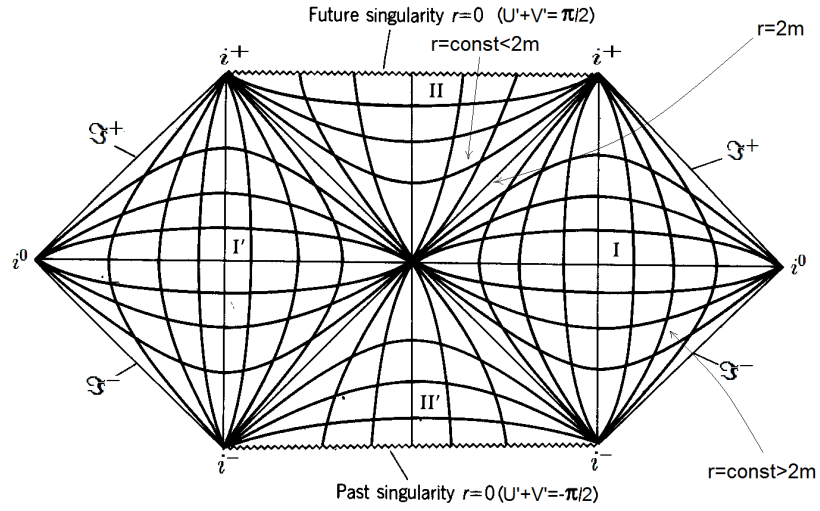


Figura 7.4: Diagramma di Penrose della soluzione di Kruskal

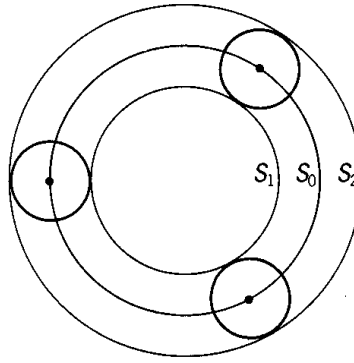


Figura 7.5: Fronti d'onda sferici di una 2-sfera  $S_0$

il loro inviluppo formerà due 2-sfere  $S_1$ ,  $S_2$ . Il raggio di  $S_2$  sarà maggiore di quello di  $S_0$  il quale a sua volta è maggiore di quello di  $S_1$ . Tuttavia nell'eventualità che  $S_0$  giaccia nella regione  $II$  entrambi i fronti d'onda  $S_1$ ,  $S_2$  avranno raggio minore di  $S_0$ . Una tale superficie viene detta superficie chiusa intrappolata. La regione  $II'$  è la regione di buco bianco ed è equivalente alla regione di buco nero ma con tempo invertito, qui tutti i punti provengono da una singolarità passata.

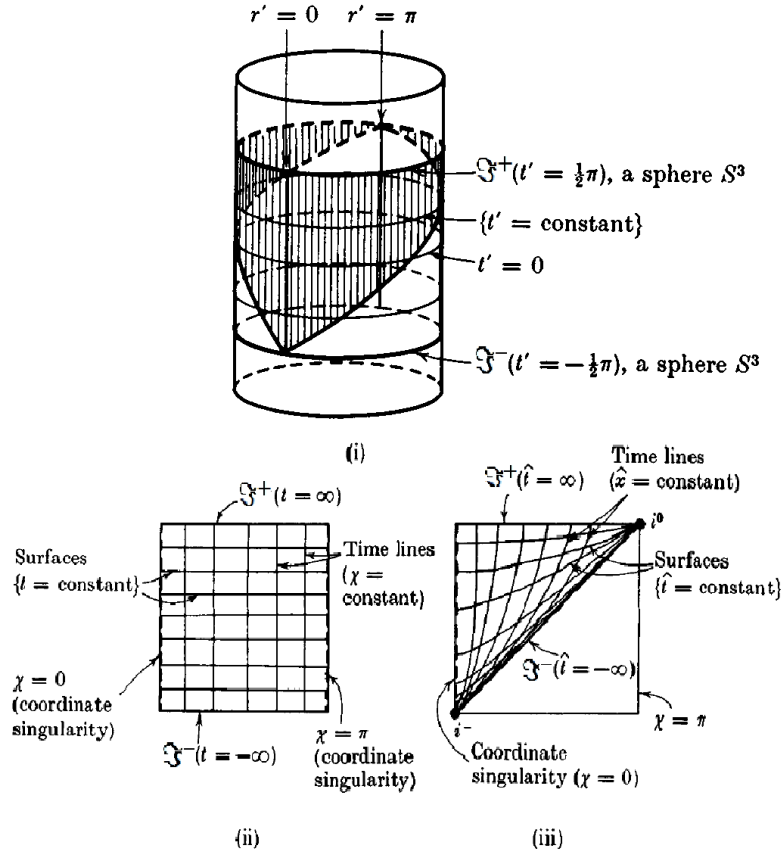


Figura 7.6: Lo spazio di de Sitter è conforme alla regione  $-\pi/2 < t'\pi/2$  dell'universo statico di Einstein. L'universo stazionario corrisponde alla regione ombreggiata (i). Il diagramma di Penrose dello spazio tempo di de Sitter (ii).

### 7.3 Diagramma di Penrose per la soluzione di de Sitter

Al fine di studiare la struttura causale dell'infinito per la soluzione di de Sitter si definisce la coordinata  $t'$  come

$$t' = 2tg^{-1}(\exp(t/\alpha)) - \frac{1}{2}\pi \quad (7.21)$$

dove  $-\pi/2 < t < \pi/2$ . Utilizzando tale coordinata l'elemento di linea (6.65) diviene

$$ds^2 = \cosh^2(t/\alpha) d\bar{s}^2 \quad (7.22)$$

dove

$$d\bar{s}^2 = dt'^2 - d\chi^2 - \sin^2\chi (d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \quad (7.23)$$

Lo spazio di de Sitter è dunque conforme a quella parte dell'universo statico di Einstein definita dall'intervallo in cui può spaziare  $t'$ , la Fig 7.6 (i) ne è una rappresentazione.

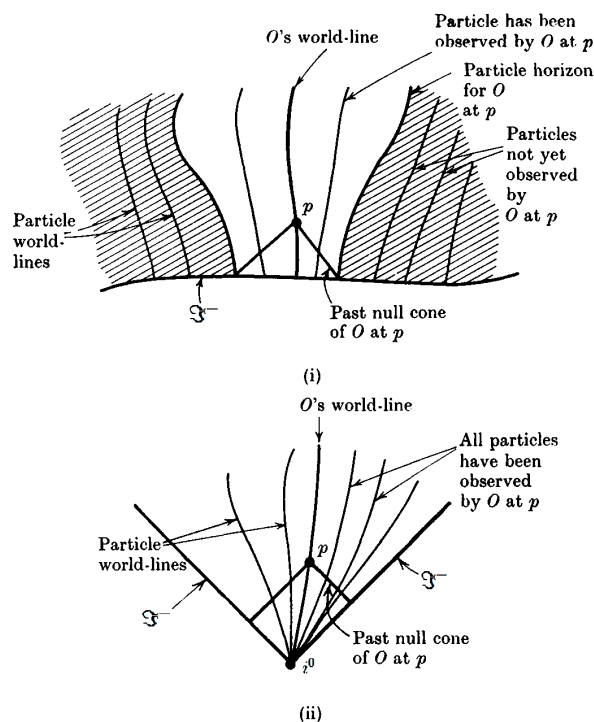


Figura 7.7: (i) L'orizzonte delle particelle definito da una congruenza di curve geodetiche quando l'infinito passato nullo  $\mathfrak{S}^-$  è di tipo spazio. (ii) Mancanza di tale orizzonte se  $\mathfrak{S}^-$  è nullo

Si evince dal grafico (*Fig 7.6(ii)*) che per lo spazio di de Sitter, a differenza di quello di Minkowski, l'infinito, sia passato che futuro, per le curve tipo-tempo e nulle è di tipo-spazio. Si consideri una famiglia di particelle le cui storie siano geodetiche tipo tempo; esse si devono originare all'infinito tipo spazio  $\mathfrak{S}^-$  e terminare all'infinito tipo spazio  $\mathfrak{S}^+$ . Sia  $p$  un evento lungo la linea di mondo di una particella  $O$  di tale famiglia. Il cono di luce passato di  $p$  è l'insieme di eventi nello spazio-tempo che possono essere osservati da  $O$  in quell'istante. Le linee di mondo di alcune particelle possono intercettare tale cono di luce, queste particelle risulteranno dunque visibili da  $O$ . Esistono tuttavia particelle le cui linee di mondo non intercettano il cono di luce, di conseguenza non risultano ancora visibili da  $O$ . Ad un tempo successivo  $O$  può osservare più particelle ma esisteranno ancora particelle che non può vedere: il confine fra le particelle che possono essere viste da  $O$  in  $p$  e quelle che non sono visibili è detto orizzonte delle particelle per l'osservatore  $O$  al tempo  $p$ . Nello spazio-tempo di Minkowski invece tutte le particelle, se si muovono su geodetiche tipo-tempo, sono visibili ad ogni evento  $p$  sulla linea di mondo di  $O$ . Finché si considerano solo famiglie di osservatori geodetici è possibile pensare l'esistenza dell'orizzonte di particelle come conseguenza del fatto che l'infinito passato

nullo è di tipo-spazio (*Fig 7.7*).

Tutti gli eventi al di fuori del cono di luce di  $p$  sono eventi mai osservati dall'osservatore  $O$  al tempo identificato dall'evento  $p$ . La linea di mondo di  $O$  ha un limite in  $\mathfrak{S}^+$ , il cono di luce passato in questo punto identifica un confine fra quegli eventi che saranno visibili da  $O$  in un qualche punto e quelli che non lo saranno mai. Tale superficie viene detta orizzonte degli eventi futuro. Nello spazio-tempo di Minkowski invece il cono di luce limite può contenere l'intero spazio-tempo. E' possibile pensare l'esistenza dell'orizzonte degli eventi futuro come conseguenza del fatto che  $\mathfrak{S}^+$  è di tipo spazio (*Fig. 7.8*). Si consideri ora l'orizzonte degli eventi per l'osservatore  $O$  e si supponga che ad un certo tempo proprio  $p$  sulla sua linea di mondo il suo cono di luce passato intercetti la linea di mondo di una particella  $Q$ , di conseguenza  $Q$  è sempre osservabile da  $O$  a partire dall'evento  $p$ . Tuttavia esiste sulla linea di mondo di  $Q$  un evento  $r$  che giace sull'orizzonte futuro di  $O$ , di conseguenza  $O$  non può vedere eventi che seguono  $r$  sulla linea di mondo di  $Q$ .  $O$  dunque può osservare, in un tempo infinito, solo una porzione finita della linea di mondo di  $Q$ . In qualsiasi punto sulla linea di mondo di  $O$  il cono di luce futuro è il limite di un insieme di eventi che  $O$  può influenzare. Al fine di ottenere l'insieme massimale di eventi nello spazio-tempo che  $O$  può influenzare è sufficiente considerare il cono di luce futuro di  $O$  al limite passato della linea di mondo ossia sull'infinito passato  $\mathfrak{S}^-$ . Tale cono di luce ha un'esistenza non banale solo nell'eventualità che l'infinito passato  $\mathfrak{S}^-$  sia di tipo spazio. Risulta chiaro dalla suddetta discussione che nel caso dell'universo stazionario, il quale ha un infinito passato nullo per le geodetiche tipo-tempo e nulle ed un infinito futuro tipo spazio, ogni osservatore ha un orizzonte degli eventi futuro ma non l'orizzonte delle particelle passato.

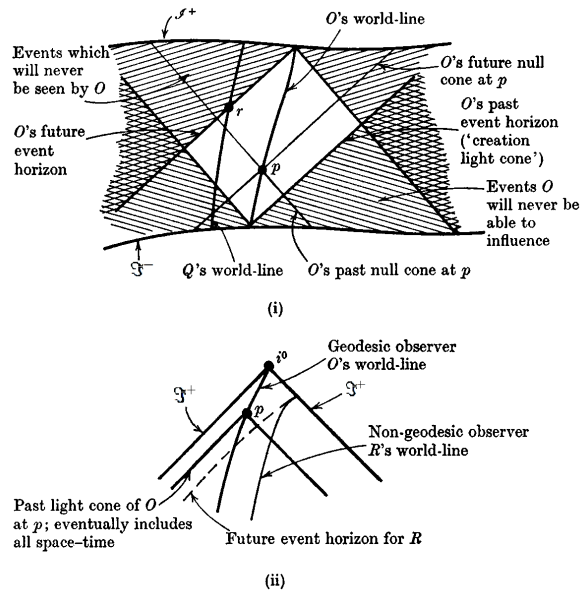


Figura 7.8: (i) L'orizzonte degli eventi futuro di una particella  $O$  il quale si verifica qualora l'infinito futuro  $\mathfrak{I}^+$  sia tipo spazio (ii) Se l'infinito futuro è nullo non si presenta l'orizzonte degli eventi futuro per un osservatore geodetico  $O$ . Tuttavia un osservatore accelerato  $R$  può avere un orizzonte degli eventi futuro

## Capitolo 8

# Shell de Sitter-Schwarzschild

In questo capitolo si mostra come connettere lo spazio-tempo di Schwarzschild con quello di de Sitter e si ricava l'equazione del moto della parete che divide le due regioni. Il procedimento è tratto da Guth et al.<sup>[19]</sup> Al fine di rispondere ad alcune problematiche del modello del Big Bang si introdusse il concetto di inflazione: un'espansione smisurata e rapidissima nelle prime fasi di vita dell'universo a causa della presenza di una forte pressione negativa. Si è ipotizzato che tale effetto sia causato da un campo scalare a cui corrisponde una particella detta inflatone. Un generico campo scalare  $\phi$  può essere descritto attraverso la seguente lagrangiana

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - V(\phi) = \frac{1}{2} \left( \dot{\phi}^2 - \nabla \phi \cdot \nabla \phi \right) - V(\phi) \quad (8.1)$$

dove il termine tra parentesi viene detto cinetico mentre il termine esterno alle parentesi è il potenziale del campo dell'inflatone. A partire dalla lagrangiana è possibile costruire il tensore energia-impulso

$$T_{\mu\nu} = \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - g_{\mu\nu} \mathcal{L} \quad (8.2)$$

Al campo scalare  $\phi$  possono inoltre essere associate una densità di energia effettiva ed una pressione effettiva

$$\rho_\phi = T_{00}, \quad p_\phi = T_{ii} \quad (8.3)$$

Il modello inflazionario permette un'ampia scelta delle condizioni iniziali, in particolare è possibile immaginare l'universo primordiale come una struttura non omogenea di conseguenza si possono avere regioni più calde di altre, regioni in espansione ed altre in contrazione eccetera. Tale scelta, rispetto all'ipotesi di omogeneità, comporta significative complicazioni matematiche nella modellizzazione dello spazio-tempo. In questo capitolo si espone lo studio dello spazio-tempo nel caso più semplice di disomogeneità: si assume la simmetria sferica e si studia la relazione fra una regione finita di falso vuoto ed una infinita di vero vuoto separate da una regione detta parete. Nella regione di vuoto data la simmetria sferica la metrica sarà data dalla soluzione di Schwarzschild. Nella regione



di falso vuoto si potrebbero applicare numerose soluzioni a simmetria sferica, tuttavia, poichè la regione di falso vuoto comprende l'interno della configurazione, si sceglie una soluzione non singolare per  $r = 0$  il che fa ricadere la scelta sulla soluzione di de Sitter. Tale trattazione risulterà utile per comprendere la formazione di PBH. Come ulteriore semplificazione si assume l'approssimazione di parete sottile vale a dire che lo spessore della parete è considerato molto piccolo se comparato con le altre scale di lunghezza del problema. Nella seguente esposizione saranno utilizzate le condizioni di giunzione di Israel, una trattazione di tale strumento matematico si trova in appendice.

## 8.1 Condizioni di giunzione

In questa sezione si utilizzerà l'equazione di campo di Einstein al fine di ricavare l'equazione che regola l'evoluzione della parete. Applicando l'equazione di campo

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = 8\pi GT_{\mu\nu} \quad (8.4)$$

al problema in questione si avrà che

$$T_{\mu\nu} = \begin{cases} -\rho_0 g_{\mu\nu} & \text{nella regione di falso vuoto} \\ 0 & \text{nella regione di vero vuoto} \end{cases} \quad (8.5)$$

dove  $\rho_0$  denota l'energia di falso vuoto, mentre alla regione di vuoto non è associata alcuna energia. Tale forma del tensore energia-impulso può essere dedotta a partire dalle equazioni (8.3): nell'eventualità di un universo in prima approssimazione omogeneo ( $\nabla\phi = 0$ ) esse danno

$$\rho_\phi = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi) \quad p_\phi = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - V(\phi) \quad (8.6)$$

Se ora si assume il dominio del termine cinetico sul termine di potenziale ( $\dot{\phi}^2 \gg V(\phi)$ ) si ottiene

$$\rho_\phi \sim \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 \quad p_\phi \sim \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 \rightarrow p_\phi \sim \rho_\phi = \rho_0 \quad (8.7)$$

il che giustifica la scrittura del tensore energia-impulso nell'equazione (8.5). Nell'approssimazione di parete sottile  $T_{\mu\nu}$  ha una singolarità sulla parete rappresentata da una distribuzione  $\delta$  di Dirac. Si impone ora un sistema di coordinate sulla parete la quale viene visualizzata come un ipersuperficie  $\Sigma$ : data la simmetria sferica del problema si utilizzano  $\theta$  e  $\phi$  le quali risultano ben definite, inoltre si utilizza il tempo proprio  $\tau$  di un osservatore comovente con la parete. Come mostrato in dettaglio in appendice si può pensare che l'ipersuperficie sia attraversata da una congruenza di geodetiche e che ogni punto  $P$  dell'iperspazio appartenga ad una ed una sola geodetica, la coordinata  $\eta$  rappresenta la distanza propria fra il punto e l'ipersuperficie  $\Sigma$ : per  $\eta = 0$  il punto giace

sull'ipersuperficie, per  $\eta > 0$  il punto è nella regione di vero vuoto e per  $\eta < 0$  il punto è nella regione di falso vuoto. E' inoltre possibile introdurre il campo vettoriale  $\xi^\mu$  il quale è normale a tutte le ipersuperfici  $\eta = \text{const}$  e punta dallo spazio-tempo di de Sitter a quello di Schwarzschild. Poichè il tensore energia impulso è dotato di una singolarità sulla parete esso può essere scritto come

$$T^{\mu\nu}(x) = S^{\mu\nu}(x^i) + (\text{termini regolari}) \quad (8.8)$$

dove  $S^{\mu\nu}$  è il tensore energia impulso superficiale. Utilizzando le condizioni di giunzione di Israel ( si veda appendice A equazione (A.29)) si ottiene

$$[K^i_j] - \delta^i_j K = -8\pi G S^i_j \quad (8.9)$$

Prendendo la traccia dell'equazione (8.9) si ottiene che  $Tr [K] = 4\pi G Tr S$ , tale relazione può essere sostituita nuovamente nella suddetta equazione per ottenere

$$[K^i_j] = -8\pi G \left( S^i_j - \frac{1}{2} \delta^i_j Tr S \right) \quad (8.10)$$

Nel sistema di coordinate considerato le componenti non nulle della connessione affine sono

$$\Gamma^k_{ij} = {}^3\Gamma^k_{ij} \quad \Gamma^\eta_{ij} = -K_{ij} \quad \Gamma^i_{\eta j} = K^i_j \quad (8.11)$$

Utilizzando tali relazioni è possibile scrivere le equazioni di conservazione del tensore energia impulso

$$\begin{aligned} T^i{}_{;\nu}{}^\nu &= T^{ij}_{;j} + T^{i\eta}_{;\eta} + 2K^i_j T^{j\eta} + (Tr K) T^{i\eta} = 0 \\ T^{\eta\nu}{}_{;\nu} &= T^{\eta i}_{;i} + T^{\eta\eta}_{;\eta} - K_{ij} T^{ij} + (Tr K) T^{\eta\eta} = 0 \end{aligned} \quad (8.12)$$

Dove la virgola indica la derivata ordinaria e la barra verticale la derivata covariante tridimensionale. Nel caso studiato il tensore energia impulso può essere scritto come

$$T^{\mu\nu}(x) = S^{\mu\nu}(x^i) \delta(\eta) - \rho_0 \Theta(-\eta) g^{\mu\nu} \quad (8.13)$$

Combinando le ultime equazioni è possibile scrivere

$$T^i{}_{;\nu}{}^\nu = \left[ S^{ij}_{;j} + 2K^i_j S^{j\eta} + (Tr K) S^{i\eta} \right] \delta(\eta) + S^{i\eta} \delta'(\eta) = 0 \quad (8.14)$$

dove l'apostrofo indica la derivazione rispetto ad  $\eta$ . Tale equazione presenta un'ambiguità poichè se valutata in  $\eta = 0$  risulta discontinua. Tuttavia ponendo il coefficiente di  $\delta'(\eta) = 0$  si rimuove la difficoltà

$$S^{i\eta} = 0 \quad (8.15)$$

L'annullarsi del termine in  $\delta(\eta)$  invece richiede che

$$S^{\text{ij}}_{\text{ij}} = 0 \quad (8.16)$$

Dalla seconda equazione della coppia (8.12) si evince che

$$T^{\mu\nu}_{;\nu} = [\rho_0 - \overline{K}_{\text{ij}} S^{\text{ij}} + (Tr K) S^{\eta\eta}] \delta(\eta) + S^{\eta\eta} \delta'(\eta) = 0 \quad (8.17)$$

dove

$$\overline{K}_{\text{ij}} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2} [K_{\text{ij}}(\eta = +\epsilon) + K_{\text{ij}}(\eta = -\epsilon)] \quad (8.18)$$

Ancora una volta per eliminare l'ambiguità e realizzare l'uguaglianza si chiede che

$$S^{\eta\eta} = 0 \quad (8.19)$$

e che

$$\overline{K}_{\text{ij}} S^{\text{ij}} = \rho_0 \quad (8.20)$$

Combinando le condizioni (8.15) e (8.19) con l'invarianza rotazionale del problema è possibile dedurre che il tensore energia impulso  $S^{\mu\nu}$  può essere scritto come

$$S^{\mu\nu} = \sigma(\tau) U^\mu U^\nu - \zeta(\tau) (h^{\mu\nu} + U^\mu U^\nu) \quad (8.21)$$

dove

$$h^{\mu\nu} = g^{\mu\nu} - \xi^\mu \xi^\nu \quad (8.22)$$

è la proiezione della metrica sull'ipersuperficie della parete e

$$U^\mu = (1, 0, 0, 0) \quad (8.23)$$

è la quadri-velocità della parete, infine  $\sigma$  è la densità di energia superficiale e  $\zeta$  la tensione della superficie. L'invarianza rotazionale implica che la metrica della parete possa essere scritta come

$$ds^2 = d\tau^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \quad (8.24)$$

L'equazione (8.16) si riduce dunque a

$$\dot{\sigma} = -2(\sigma - \zeta) \frac{\dot{r}}{r} \quad (8.25)$$

dove il punto indica la derivazione rispetto a  $\tau$ . Moltiplicando ambo i lati dell'equazione per l'area di una sfera  $A = 4\pi r^2$  essa può essere riscritta come

$$\frac{d}{d\tau}(A\sigma) = \zeta \frac{dA}{d\tau} \quad (8.26)$$

Tale formula rappresenta la conservazione dell'energia. I valori di  $\sigma$  e  $\zeta$  sono limitati dalla dinamica del sottostante campo scalare il quale ha un tensore energia impulso pari a

$$T_{\mu\nu} = \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - g_{\mu\nu} \left[ \frac{1}{2} \partial_\sigma \phi \partial_\tau \phi g^{\sigma\tau} + V(\phi) \right] \quad (8.27)$$

E' possibile notare che l'approssimazione di parte sottile implica che qualsiasi variazione del campo  $\phi$  avvenga su scale più ampie dello spessore della parete e dunque  $\partial_\mu \phi \propto \xi_\mu$ . Quindi  $T_{\mu\nu}$  può avere solo termini proporzionali a  $\xi_\mu \xi_\nu$  e a  $g_{\mu\nu}$  ne consegue che  $\sigma = \zeta$ . Dall'ultima relazione e da (8.25) segue che  $\dot{\sigma} = 0$  ed infine segue che

$$S^{\mu\nu} = -\sigma h_{\mu\nu}(x^i, \eta = 0) \quad (8.28)$$

## 8.2 Equazione del moto della parete

In questa sezione si ricostruirà l'equazione del moto del raggio proprio della circonferenza della parete a partire dai risultati ottenuti in questo capitolo e nei precedenti. Combinando le equazioni 8.23 e (8.5) si ottiene

$$[K_j^i] = K_j^i(\text{Schwarzschild}) - K_j^i(\text{de Sitter}) = -4\pi G \sigma \delta_j^i \quad (8.29)$$

E' ora fondamentale il calcolo delle componenti della curvatura estrinseca vista da un osservatore immerso nello spazio di Schwarzschild e da uno immerso in quello di de Sitter. Nel sistema di coordinate utilizzato essa può essere espressa come

$$K_{ij} = -\Gamma_{ij}^\eta = \frac{1}{2} \partial_\eta g_{ij} \quad (8.30)$$

da cui si evince che la curvatura estrinseca è un tensore simmetrico. La simmetria sferica garantisce che gli elementi non diagonali del tensore sono nulli e che la componenti angolari sono collegate dalla relazione  $K_{\theta\theta} = \sin^2 \theta K_{\phi\phi}$  di conseguenza la dinamica della parete è specificata dalle sole componenti  $\tau\tau$  e  $\theta\theta$ . Poichè

$$K_{\theta\theta} = \frac{1}{2} \partial_\eta r^2 = \frac{1}{2} \xi^\mu \partial_\mu r^2 \quad (8.31)$$

è fondamentale la valutazione il vettore normale alla parete  $\xi^\mu$ . Poichè la parete gode di simmetria sferica, la quadri-velocità di ogni punto appartenente ad essa, vista da un osservatore nello spazio di Schwarzschild

$$U_K^\mu = (\dot{T}, \dot{X}, 0, 0) \quad (8.32)$$

espressa nelle coordinate di Kruskal, dove il punto indica la derivazione rispetto al tempo proprio. Nelle coordinate ordinarie invece la quadri-velocità appare nella seguente forma

$$U_S^\mu = (\dot{t}, \dot{r}, 0, 0) \quad (8.33)$$

Poichè la normale  $\xi^\mu$  è ortogonale a  $U^\mu$  si avrà che

$$\xi_K^\mu = (\dot{X}, \dot{T}, 0, 0) \quad (8.34)$$

nelle coordinate di Kruskal. Trasformando tale vettore nelle coordinate di Schwarzschild si ottiene

$$\xi^\mu = (A_S^{-1}\dot{r}, \beta_S, 0, 0) \quad (8.35)$$

dove

$$A_S = 1 - \frac{2m}{r} \quad (8.36)$$

e

$$\beta_S = A_S \dot{t}_{(S)} = \frac{(2m)^3}{r} e^{-r/2m} (T\dot{X} - X\dot{T}) \quad (8.37)$$

Dove il pedice (S) enfatizza che  $t$  rappresenta la variabile temporale di Schwarzschild. E' possibile mettere in relazione  $\dot{t}$  e  $\dot{r}$  utilizzando la quadrivelocità  $U_S^\mu$  da cui risulterà

$$\beta_S = \pm (A_S + \dot{r})^{1/2} \quad (8.38)$$

Applicando l'equazione (8.31) si ottiene

$$K_{\theta\theta}(Schwarzschild) = r\beta_S \quad (8.39)$$

L'ambiguità di segno dell'equazione (8.38) si risolve utilizzando la forma (8.32) la quale prescrive che  $\beta_S$  sia positivo se l'angolo identificato da  $\text{artg} X/T$  cresce muovendosi lungo la traiettoria della parete, è negativo se invece decresce. Ripetendo il medesimo raginamento per il vettore normale visto dallo spazio tempo di de Sitter si ottiene

$$U_{GH}^\mu = (\dot{V}, \dot{U}, 0, 0) \quad (8.40)$$

nelle coordinate Gibbons-Hawking e

$$U_{\text{stat}}^\mu = (\dot{t}, \dot{r}, 0, 0) \quad (8.41)$$

nel sistema di coordinate statiche di de Sitter. Il vettore normale è dunque

$$\xi_{GH}^\mu = (\dot{U}, \dot{V}, 0, 0) \quad (8.42)$$

il quale trasformato diviene

$$\xi_{\text{stat}}^\mu = (A_D^{-1}\dot{r}, \beta_D, 0, 0) \quad (8.43)$$

dove

$$A_D = 1 - \frac{r^2}{\alpha^2} \quad (8.44)$$

e

$$\beta_D = A_D \dot{t}_{(D)} = -\alpha \left(1 + \frac{r}{\alpha}\right)^2 (U\dot{V} - V\dot{U}) \quad (8.45)$$

dove il pedice (D) enfatizza che  $t$  è la variabile temporale delle coordinate statiche di de Sitter. Normalizzando la quadri-velocità si ottiene

$$\beta_D = \pm (A_D + \dot{r}^2)^{1/2} \quad (8.46)$$

Infine

$$K_{\theta\theta}(de\ Sitter) = r\beta_D \quad (8.47)$$

L'ambiguità del segno di (8.46) ancora una volta con una prescrizione geometrica, questa volta opposta al caso precedente;  $\beta_D$  è positivo se l'angolo identificato da  $\text{artg}(V/U)$  decresce muovendosi lungo la traiettoria della parete, negativo se l'angolo cresce. La componente  $\theta\theta$  dell'equazione (8.29) può essere ora riscritta come

$$\beta_D - \beta_S = 4\pi G\sigma r \quad (8.48)$$

La componente  $\tau\tau$  dell'equazione (8.24) è linearmente indipendente dalle componenti angolari, tale componente può essere calcolata a partire dal seguente risultato

$$K_{\tau\tau} = \xi_{\tau;\tau} = U^\mu U^\nu \xi_{\mu;\nu} = -\xi_\mu U^\nu U^\mu_{;\nu} = -\xi_\mu \frac{DU^\mu}{D\tau} \quad (8.49)$$

da cui si evince che  $K_{\tau\tau}$  è la componente dell'accelerazione della parete nella direzione normale. Utilizzando quest'ultima relazione è possibile ricavare

$$K_{\tau\tau} = \begin{cases} -\frac{1}{\beta_S} \left( \ddot{r} + \frac{2GM}{r^2} \right) & \text{nel caso Schwarzschild} \\ -\frac{1}{\beta_D} \left( \ddot{r} - \frac{r}{\alpha^2} \right) & \text{nel caso de Sitter} \end{cases} \quad (8.50)$$

Si evince che l'equazione (8.50) altro non è che la derivata rispetto al tempo proprio dell'equazione (8.48). Deve esistere dunque una relazione fra le componenti angolari e temporali di (8.29). E' inoltre possibile ricavare un'equazione per  $\ddot{r}$  la quale risulta essere

$$\frac{1}{2} \left( \frac{1}{\beta_S} + \frac{1}{\beta_D} \right) \sigma \ddot{r} = -\frac{(\beta_D + \beta_S)\zeta}{r} - \frac{GM\sigma}{2\beta_S r^2} + \frac{\sigma r}{2\beta_D \alpha^2} - \rho_0 \quad (8.51)$$

è possibile verificare che tale equazione è equivalente alla componente  $\tau\tau$  dell'equazione (8.26). Nel limite non relativistico gli elementi del lato destro dell'equazione possono essere interpretati come la tensione superficiale, l'attrazione gravitazionale, la repulsione di de Sitter, e la differenza di pressione. L'equazione (8.48) permette di esprimere la massa  $M$  in funzione di  $r$  ed  $\dot{r}$

$$M = \frac{r^3}{2G\alpha^2} + 4\pi\sigma r^2(\alpha^{-2}r^2 + \dot{r}^2)^{1/2} \text{sgn}\beta_D - 8\pi^2 G\sigma^2 r^3 \quad (8.52)$$

# Capitolo 9

## Formazione di buchi neri

In questo capitolo si risolverà l'equazione del moto della parete ricavata nel capitolo precedente e se ne commenteranno i risultati tratti da Guth et al.<sup>[19]</sup>. In particolare si vedrà come dalle bolle di falso vuoto sia ipotizzabile, sotto determinate assunzioni, la nascita di strutture complesse tra le quali i buchi neri.

### 9.1 Soluzione dell'equazione del moto della parete

Innanzitutto si opera una manipolazione sulle equazione (8.43): spostando  $\beta_S$  sul lato destro ed elevando al quadrato l'equazione viene riscritta nel seguente modo

$$2GM = \chi^2 r^3 + 2kr^2 \beta_S \quad (9.1)$$

dove

$$k \equiv 4\pi G\sigma \quad (9.2)$$

e

$$\chi^2 \equiv \frac{\alpha^2}{k} \quad (9.3)$$

Si introducono ora le variabili adimensionali

$$z^3 \equiv \frac{\chi^2}{2GM} r^3 \quad (9.4)$$

e

$$\tau' \equiv \frac{\chi^2 \tau}{2k} \quad (9.5)$$

Mediante l'uso di tali variabili l'equazione (9.1) può essere riscritta nel seguente modo

$$1 = z^3 \pm z^2 \left[ \left( \frac{dz}{d\tau'} \right)^2 - \frac{\gamma^2}{z} - E \right]^{1/2} \quad (9.6)$$

dove

$$E \equiv \frac{-4k^2}{(2GM)^{2/3}\chi^{8/3}} \quad (9.7)$$

e

$$\gamma \equiv \frac{2k}{\chi} \quad (9.8)$$

Si noti che  $0 \leq |\gamma| \leq 2$ . L'equazione (9.6) può essere riscritta come

$$\left(\frac{dz}{d\tau'}\right)^2 + V(z) = E \quad (9.9)$$

dove

$$V(z) = -\left(\frac{1-z^3}{z^2}\right)^2 - \frac{\gamma^2}{z} \quad (9.10)$$

L'equazione del moto della parete è dunque identica a quella di una particella che si muova lungo un'unica dimensione sotto l'azione di un potenziale. La soluzione è data da

$$\int^z \frac{dz'}{\sqrt{E - V(z')}} = \tau' \quad (9.11)$$

Mentre è evidente che qualunque soluzione della (8.43) è soluzione della (9.9) è necessario giustificare la validità della proposizione opposta. Nell'ottenere l'equazione (9.1) a partire dalla (8.43) si sono elevati al quadrato ambo i lati dell'uguaglianza, tale operazione potrebbe introdurre soluzioni ulteriori, tuttavia non in questo caso. La ragione risiede nel fatto che l'equazione (8.43) fornisce una soluzione valida del problema per entrambi i segni della radice quadrata che definisce  $\beta_D$  nella (8.41), come si è detto i due segni corrispondono a due diverse traiettorie nello spazio-tempo. Un ragionamento simile si applica per  $\beta_S$ . Si noti che la radice nell'equazione (9.6) è proporzionale a  $\beta_S$  e che l'assenza di soluzioni spurie è garantita dal fatto che l'equazione (8.43) fornisce soluzioni per entrambi i segni di  $\beta_S$ , di conseguenza le soluzioni dell'equazione (9.9) sono esattamente le soluzioni del problema in questione. I parametri della fisica sottostante sono contenuti nel parametro adimensionale  $\gamma$ . Se si assume che l'energia del falso vuoto  $\rho_0$  sia dell'ordine di  $M_{\text{GUT}}^4$  e che la densità superficiale di energia sia dell'ordine  $M_{\text{GUT}}^3$ , dove  $M_{\text{GUT}} \sim 10^{14} \text{Gev}$  è l'energia a cui la forza elettrodebole e l'interazione forte risultano unificate, allora si ha  $\gamma \sim 10^{-4}$ . Il grafico di  $V(z)$  può essere osservato in *Fig* (9.1), poichè i valori di  $\gamma$  fisicamente plausibili sono molto piccoli si è posto un valore maggiore al fine di rendere il grafico ben visualizzabile. Le caratteristiche salienti di  $V(z)$  valgono comunque per qualsiasi valore di  $\gamma$ :  $V(z) \sim -1/z^4$  per valori di  $z$  piccoli,  $V(z) \sim -z^2$  per valori di  $z$  grandi,  $V(z) < 0$  per ogni valore di  $z$  così come  $dV(z)/dz$ .  $V(z)$  è dotata di un massimo per

$$z_m^3 = \frac{1}{2} \left[ \left( 8 + \left( 1 - \frac{1}{2}\gamma^2 \right)^2 \right)^{1/2} - \left( 1 - \frac{1}{2}\gamma^2 \right) \right] \quad (9.12)$$



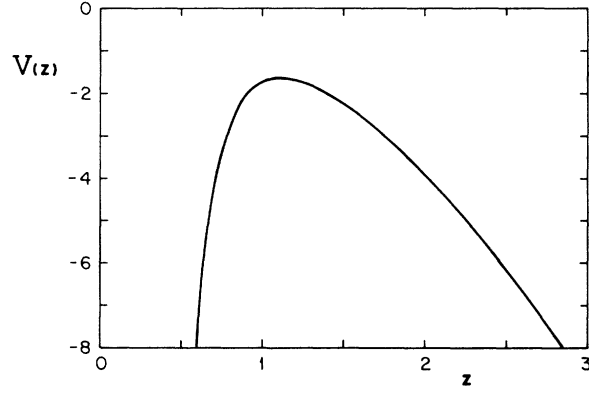


Figura 9.1: L'energia potenziale  $V(z)$  per  $\gamma = 1.3$

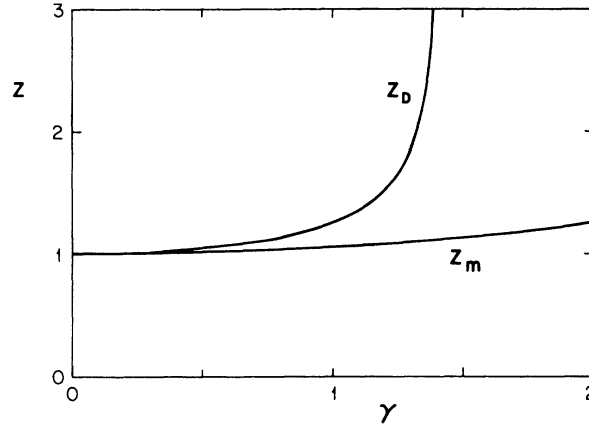


Figura 9.2: L'energia potenziale  $V(z)$  per  $\gamma = 1.3$

Dalla figura (9.2). che mostra l'andamento di  $z_m$  in funzione di  $\gamma$  si evince che  $z_m > 1$  per  $\gamma^2 > 0$  Il valore massimo del potenziale è

$$V_m = V(z_m) = -\frac{3(z_m^6 - 1)}{z_m^4} \quad (9.13)$$

E' possibile inoltre identificare una massa critica definita dalla relazione  $E(M_{cr}) = V_m$ , tale massa risulta dunque essere

$$M_{cr} = \overline{M} \frac{\gamma^3 z_m^6 (1 - \frac{1}{4}\gamma^2)^{1/2}}{3\sqrt{3}(z_m^6 - 1)^{3/2}} \quad (9.14)$$

dove

$$\overline{M} \equiv \frac{4\pi}{3} \alpha^3 \rho_0 = \frac{\alpha}{2G} \quad (9.15)$$

Si noti che  $\overline{M}$  può essere pensata come una massa caratteristica equivalente a  $\rho_0$  volte il volume di una sfera di raggio  $\alpha$ . Per  $\rho_0 = (10^{14} \text{Gev})^4$  si ha che  $\overline{M} \sim 3.1 \cdot 10^{28} \text{Gev} \sim 56 \text{Kg}$ . Il fattore che moltiplica  $\overline{M}$  nell'equazione (9.14) si approssima all'unità per  $\gamma \rightarrow 0$ . Il rapporto fra  $M_{\text{cr}}/\overline{M}$  è mostrato in figura (9.3). Per  $M < M_{\text{cr}}$  si distinguono due tipi di soluzioni. La prima tipologia sono soluzioni legate:  $z$  parte da zero e cresce fino al massimo per cui  $E = V(z)$  per poi ritornare a  $z = 0$ . Vi sono poi le soluzioni di rimbalzo dove  $z$  approssima l'infinito nel passato raggiunge il minimo dato da  $V(z) = E$  per poi tornare asintoticamente verso l'infinito nel futuro. Per  $M > M_{\text{cr}}$  la soluzione è detta monotona. Il valore di  $z$  parte da zero per poi crescere senza limiti, l'inversione temporale di tale soluzione è una soluzione distinta a differenza delle soluzioni legate e di rimbalzo dove l'inversione temporale è indistinguibile dalla soluzione originale. Prima di costruire i diagrammi spazio-tempo delle soluzioni si studiano alcuni punti di riferimento da aggiungere alla figura (9.1) a cominciare dallo studio del cambio di segno di  $\beta_S$  e  $\beta_D$ . Assumendo che  $\sigma > 0$  si riscrive l'equazione 9.1 come

$$\beta_S = \frac{1 - z^3}{z^2 \sqrt{|E|}} \quad (9.16)$$

Di conseguenza  $\beta_S = 0$  per  $z = 1$ ,  $\beta_S > 0$  per  $z < 1$  e  $\beta_S < 0$  per  $z > 1$ . La massa  $M_S$  definita da  $E(M_S) = V(z = 1)$  è data da

$$M_S = \overline{M} \left(1 - \frac{1}{4}\gamma^2\right)^{1/2} \quad (9.17)$$

L'andamento di  $M_S$  in funzione di  $\gamma$  è osservabile in *Fig(9.3)*. Similmente utilizzando l'equazione (8.43) è possibile ricavare che

$$\beta_D = \frac{1 - \left(1 - \frac{1}{2}\gamma^2\right) z^3}{z^2 \sqrt{|E|}} \quad (9.18)$$

Dunque se  $\gamma^2 < 2$  allora  $\beta_D$  cambia di segno per  $z = z_D$  con

$$z_D = \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{2}\gamma^2\right)^{1/3}} \quad (9.19)$$

Se invece  $\gamma^2 \geq 2$  allora  $\beta_D$  è sempre positivo. La massa  $M_D$  definita da  $E(M_D) = V(z_D)$  risulta essere

$$M_D = \overline{M} \frac{1 - \frac{1}{2}\gamma^2}{1 - \frac{1}{4}\gamma^2} \quad (9.20)$$

L'andamento di  $M_D$  in funzione di  $\gamma$  è osservabile in *Fig (9.3)*. L'orizzonte di Schwarzschild  $r = r_{\text{SH}} = 2GM$  corrisponde a

$$z_{\text{SH}} = \frac{\gamma^2}{|E|} \quad (9.21)$$

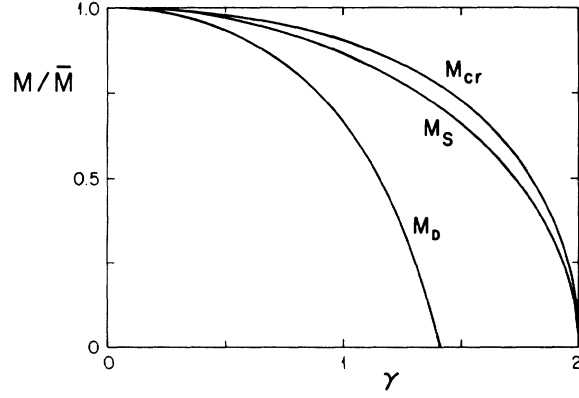


Figura 9.3: Valori specifici della massa della bolla  $M$  in funzione di  $\gamma$ , i valori sono mostrati in unità di  $\bar{M} = \alpha/G$ .  $M_{cr}$  denota il minimo valore di massa necessario affinché la soluzione attraversi il massimo del potenziale. La massa minima necessaria all'attraversamento della linea  $\beta_S = 0$  è indicato con  $M_S$  e la massa minima necessaria ad attraversare la retta  $\beta_D = 0$  è indicata con  $M_D$

Per comprendere il comportamento di tale curva in *Fig* (9.4) è utile invertire la relazione per ottenere

$$E = -\frac{\gamma^2}{z_{SH}} = V(z_{SH}) + \left( \frac{1 - z_{SH}^3}{z_{SH}^2} \right)^2 \quad (9.22)$$

Dunque la curva è tangente alla funzione  $V(z)$  per  $z = 1$ . Similmente l'orizzonte di de Sitter  $r = \alpha$  corrisponde a

$$z_{DH} = \frac{\sqrt{|E|}}{\gamma \left(1 - \frac{1}{4}\gamma^2\right)^{1/2}} \quad (9.23)$$

L'aspetto di tale funzione in *Fig* (9.4) può essere meglio compreso invertendo la relazione come nel caso precedente:

$$E = -\gamma^2 z_{DH}^2 \left(1 - \frac{1}{4}\gamma^2\right) = V(z_{DH}) + \frac{\left[\left(1 - \frac{1}{2}\gamma^2\right) z_{DH}^3 - 1\right]^2}{z_{DH}^4} \quad (9.24)$$

Tale curva è dunque tangente a  $V(z)$  per  $z = z_D$ .

## 9.2 Commento alle possibili soluzioni

Le traiettorie corrispondenti ad ogni tipo di soluzione sono indicate in *Fig* (9.4) utilizzando le lettere da  $A$  ad  $E$ .

$A$ . Questa è la soluzione limitata, essa corrisponde ad una piccola massa  $M < M_S$ . La variabile  $r$  parte da zero e cresce fino ad un valore massimo superiore al raggio di

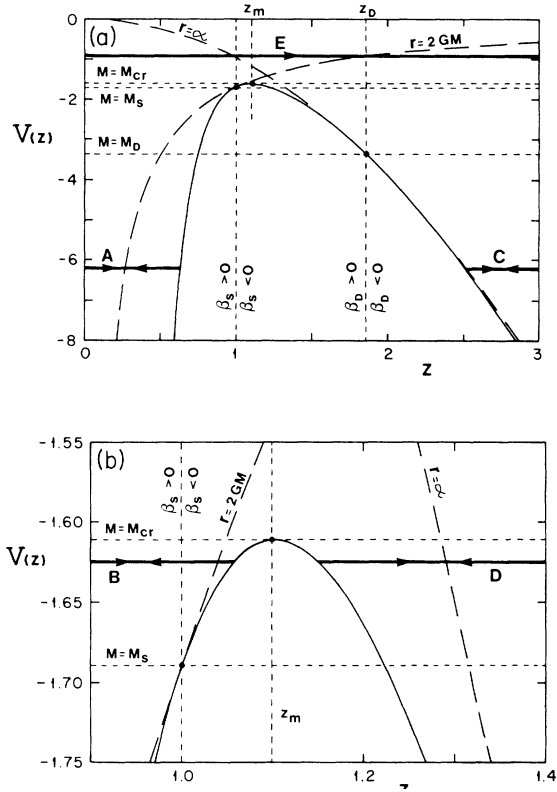


Figura 9.4: Grafico dell'energia potenziale  $V(z)$  per  $\gamma = 1.3$ . La parte (a) mostra un ampio spettro delle variabili mentre la parte (b) è un ingrandimento della regione di picco. Sono inoltre indicate le rette  $z = 1$ , in cui  $\beta_S$  cambia segno, e  $z = z_D$  a cui  $\beta_D$  cambia segno. Le linee tratteggiate orizzontali indicano i valori dell' energia corrispondenti a  $M_{cr}$ ,  $M_S$  e  $M_D$ . L'orizzonte di Schwarzschild  $r = 2GM$  e quello di de Sitter  $r = \alpha$  sono indicati con linee tratteggiate curve. Le soluzioni discusse sono indicate con le lettere da A ad E

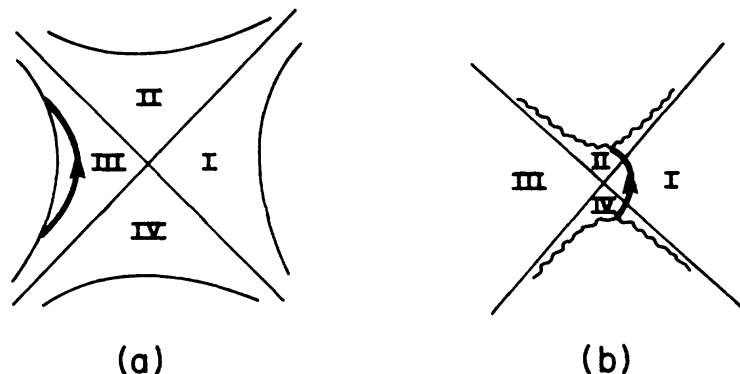


Figura 9.5: Diagrammi spazio temporali delle soluzioni A. La traiettoria nello spazio tempo di de Sitter è mostrata nella parte (a) mentre quella nello spazio tempo di Schwarzschild nella parte (b). L'effettivo spazio tempo consiste nella traiettoria, i punti in (a) alla sua sinistra ed i punti in (b) alla sua destra. Queste sono le soluzioni limitate per piccoli valori della massa  $M$ , vengono dette soluzioni di buco nero

Schwarzschild per poi invertire il moto e tornare a zero. Lungo la traiettoria sia  $\beta_S$  che  $\beta_D$  sono positivi, il che significa che l'angolo polare nelle coordinate di Schwarzschild cresce mentre il corrispettivo angolo nello spazio di de Sitter decresce. Il valore della coordinata  $t$  a cui la traiettoria si materializza è arbitrario poichè lo spazio di Schwarzschild possiede la simmetria globale  $T \rightarrow T + \text{const}$  il diagramma è stato disegnato scegliendo un  $t$  iniziale tale da rendere evidente la simmetria temporale  $T \rightarrow -T$ . Lo stesso dicasi per il diagramma di de Sitter il quale gode della medesima simmetrie. Tali configurazioni sono dette soluzioni di buco nero.

B. Anche questa è una soluzione limitata, ma si trova nello stretto intervallo  $M_S < M < M_{\text{cr}}$ . Ancora una volta  $r$  parte da zero e dopo aver raggiunto un valore massimo ritorna a zero. Tuttavia in questo caso il segno di  $\beta_S$  è negativo mentre la traiettoria è esterna al raggio di Schwarzschild il che significa che l'angolo polare è decrescente. Ciò implica che la traiettoria attraverserà la regione III piuttosto che la regione I. Il comportamento della soluzione può essere visualizzato in Fig (9.6). Si noti che tale soluzione permette l'esistenza di osservatori nello spazio di Schwarzschild sia nella regione I sia nella regione III, entrambi gli osservatori osservano la bolla dall'esterno dell'orizzonte di Schwarzschild. L'osservatore nella regione I è in grado di osservare solamente i primi stadi dell'evoluzione della bolla perdendone il contatto causale nel momento in cui la traiettoria della parete entra nella regione III. Un osservatore nella regione III dello spazio-tempo di Schwarzschild può invece seguire la parete della bolla per tutta la sua storia, tale osservatore è tuttavia condannato a collidere con la singolarità futura ad  $r = 0$ . Tale configurazione è detta di worm-hole.

C. Questa è una soluzione di rimbalzo corrispondente ad una piccola massa  $M < M_D$ .

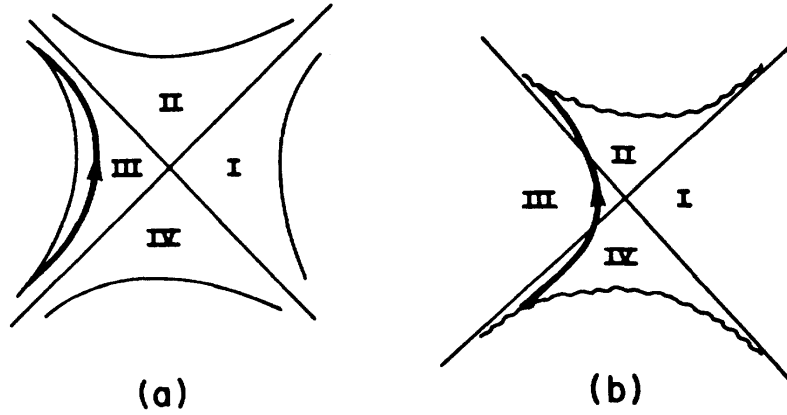


Figura 9.6: Diagramma spazio-temporale per una traiettoria di tipo *B* in cui valgono le medesime convenzioni della figura precedente. Tali soluzioni sono dette di worm-hole e risultano essere soluzioni limitate. Si noti che la traiettoria della parete della bolla non entra mai nella regione *I* dello spazio-tempo di Schwarzschild

Tale soluzione non esiste affatto nell'eventualità  $\gamma > 2$  in tale caso tutte le soluzioni di rimbalzo sono del tipo *D*. Per tali soluzioni  $r$  parte da un valore arbitrario e decresce fino ad un minimo, il quale si trova dentro l'orizzonte di de Sitter ma al di fuori dell'orizzonte di Schwarzschild, per poi crescere nuovamente. I valori di  $\beta_S$  e  $\beta_D$  sono entrambi negativi il che indica che l'angolo polare di Schwarzschild cala mentre quello di de Sitter cresce. Si noti in *Fig*(9.7) che la traiettoria attraversa sia la regione *II* sia la regione *IV* dello spazio-tempo di de Sitter. Essendo la traiettoria di tipo tempo essa deve raggiungere sia il limite superiore che quello inferiore. E' tuttavia importante sottolineare che tali limiti non sono fisici. Essi corrispondono a  $r = \infty$  il che richiede un tempo proprio infinito per raggiungerli. Si noti inoltre che la parte in alto a sinistra del diagramma di de Sitter descrive una regione in inflazione la quale ha tutte le caratteristiche di un universo inflazionario. Il diagramma è stato disegnato per uno spazio di de Sitter completamente stabile, ma mediante un opportuno modello di teoria delle particelle il falso vuoto che permea lo spazio di de Sitter potrebbe decadere dopo un'enorme espansione. Il calore latente rilasciato dal decadimento riscalderebbe la regione producendo una grande regione di spazio-tempo indistinguibile, mediante l'uso di esperimenti locali, da un universo piatto Friedmann-Robertson-Walker.

*D.* Anche questa risulta essere una soluzione di rimbalzo, tuttavia questa volta l'intervallo di massa è  $M_D < M < M_{cr}$ . In tal caso il segno di  $\beta_D$  diviene positivo prima che la traiettoria attraversi l'orizzonte di de Sitter, il che significa che la traiettoria attraversa la regione *III* piuttosto che la regione *I* del diagramma di de Sitter, vedi *Fig* (9.8)

*E.* Queste sono soluzioni monotone per cui  $r$  parte da zero e cresce senza alcun limite.

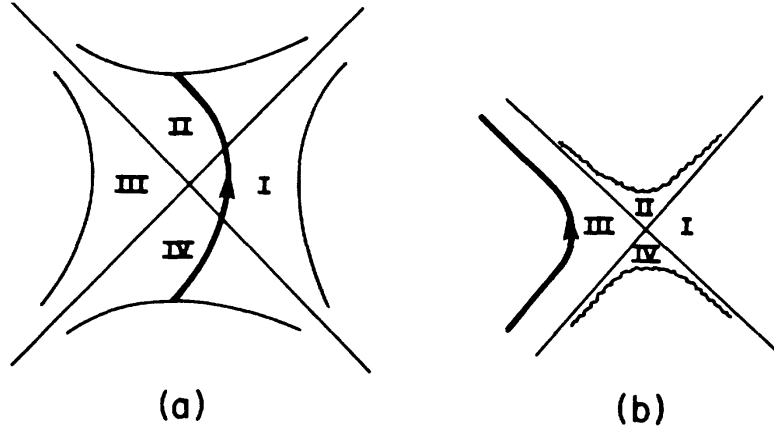


Figura 9.7: Diagramma spazio-temporale per una traiettoria di tipo  $C$ . Tali soluzioni sono dette rimbalzanti e permettono la produzione di uno scenario inflazionistico

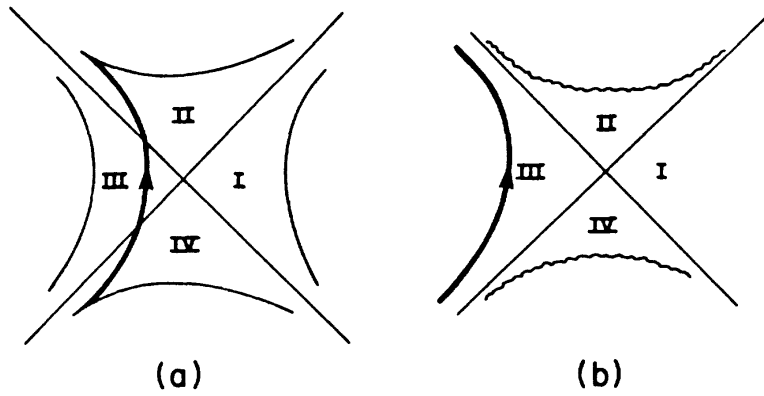


Figura 9.8: Diagramma spaziotemporale per una traiettoria di tipo  $D$ . Sono soluzioni rimbalzanti di massa superiore a quelle riportate in *Fig* (9.7)

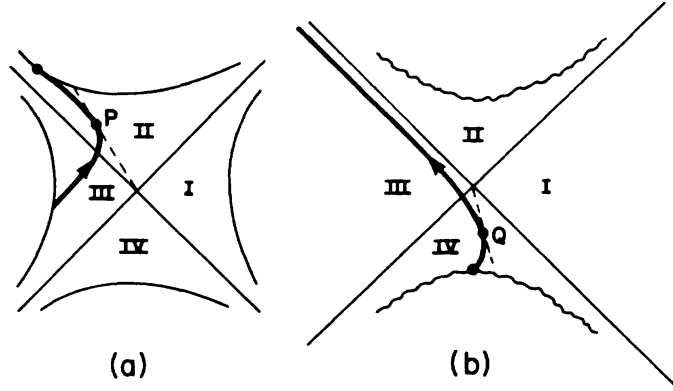


Figura 9.9: Diagramma spaziotemporale per una traiettoria di tipo  $E$ . Tali soluzioni sono dette monotone

Tali traiettorie si verificano per  $M > M_{\text{cr}}$ , vedi *Fig(9.9)*. Nel diagramma si è sfruttata la simmetria  $T \rightarrow T + \text{const}$  per far sì che la traiettoria si materializzasse a  $t = 0$  sia nelle coordinate di de Sitter sia in quelle di Schwarzschild. Il valore iniziale di  $\beta_S$  è positivo, il che indica che la traiettoria nello spazio di Schwarzschild deve muoversi inizialmente verso destra. Il segno di  $\beta_S$  cambia nel punto marcato nel diagramma con la lettera  $Q$ . Il raggio cresce poi oltre l'orizzonte di Schwarzschild con  $\beta_S$  negativo, il che implica che la traiettoria entri nella regione *III*. Nel diagramma di de Sitter il moto inizia ad  $r = 0$  con  $\beta_D$  positivo il che implica che si trova nella regione *III*. Il segno di  $\beta_D$  cambia nel punto marcato nel diagramma con la lettera  $P$  dopo che il raggio ha superato l'orizzonte di de Sitter. Come la configurazione di worm-hole del tipo  $B$  questa configurazione permette la possibilità di osservatori nello spazio di Schwarzschild sia nella regione *I* sia nella regione *III*. Ancora una volta gli osservatori nella regione *I* possono vedere solo gli stadi iniziali dell'evoluzione della bolla. L'osservatore nella regione *III* si trova fra l'orizzonte di Schwarzschild a  $r = 2GM$  e la parete della bolla in allontanamento per valori di  $r$  maggior. L'osservatore può, in linea di principio, rimanere ad  $r$  costante, raggiungere la parete ed entrare nella regione di de Sitter o entrare nel buco nero. Il regime inflazionario è nell'angolo in alto a sinistra del diagramma di de Sitter. Come discusso nel caso  $C$  il decadimento del falso vuoto permette uno scenario inflazionistico accettabile. Poiché la soluzione  $E$  appare estremamente interessante verrà approfondita. La *Fig (9.10)* mostra un singolo diagramma spazio-temporale per l'intera varietà, con diverse ipersuperfici tipo spazio indicate dalle lettere da  $a$  a  $d$ . E' possibile scegliere le coordinate di Kruskal nella regione di Schwarzschild ma risulterà poi necessario un cambio di coordinate a quelle di Gibbons-Hawking nello spazio di de Sitter per unire le due metà senza complicazioni. La *Fig(9.11)* è un tentativo di rappresentare questa successione di ipersuperfici tipo spazio. Nella rappresentazione una dimensione è stata soppressa e la risultante superficie bidimensionale è stata immersa in uno spazio tridimensionale in modo da poter mostrarne



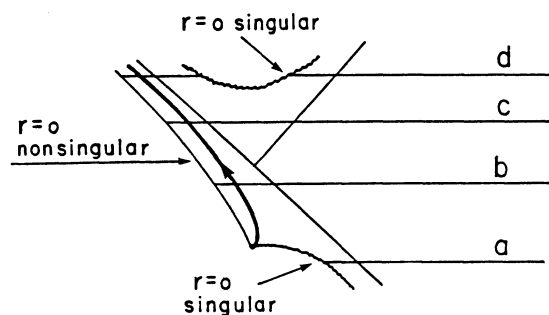


Figura 9.10: L'intero spazio-tempo nel caso di soluzione monotone. Alcune ipersuperfici a  $V = \text{const}$  sono indicate mediante le lettere da  $a$  a  $d$

la curvatura. Si noti che l'ipersuperficie  $d$  corrisponde a due spazi disgiunti: uno è lo spazio-tempo di Schwarzschild con una singolarità di buco nero in  $r = 0$ , il quale può evaporare mediante la radiazione di Hawking, la seconda è un universo chiuso contenente sia regioni de Sitter che Schwarzschild. La regione che subisce l'inflazione e produce l'universo Friedmann Robertson Walker osservabile oggi è quella di de Sitter. Nonostante il distacco di un universo chiuso dalla regione di partenza sia una caratteristica saliente della soluzione è bene domandarsi in che misura la descrizione dipende dalla scelta di taglio dello spazio-tempo. Si ignori momentaneamente l'evaporazione del buco nero. La singolarità futura di Schwarzschild giace su un ipersuperficie di tipo-spazio, è dunque possibile scegliere dei tagli a  $t = \text{const}$  senza mai raggiungere la singolarità, in un tale sistema di coordinate la varietà rimane connessa ad ogni istante. Di conseguenza la connessione delle ipersuperfici a  $t = \text{const}$  dipende dalla scelta dei tagli. Tale situazione è differente rispetto al caso di Minkowski dove le superfici a  $t = \text{const}$  sono sempre connesse ma è simile a ciò che accade nello spazio di de Sitter o di Schwarzschild. In ogni caso l'universo è distaccato nel senso che è causalmente sconnesso: un osservatore all'interno dell'universo chiuso non ha né avrà mai modo di comunicare con la regione di Schwarzschild esterna.

Attualmente si sta tentando di capire se è possibile, in linea di principio, produrre un piccolo universo inflazionario in laboratorio. Tutte le soluzioni inflazionarie descritte nel capitolo precedente cominciano da una singolarità iniziale, una caratteristica che dev'essere evitata se si desidera produrre un simile oggetto in laboratorio. E' dunque necessario domandarsi se esista un qualche metodo in grado di produrre il desiderato stato finale partendo da un differente stato iniziale. Le straordinarie masse coinvolte nelle soluzioni inflazionarie dovrebbero essere generate concentrando basse densità da ampie regioni. La difficoltà principale risiede nel fatto che il grafico del collasso gravitazionale della materia ordinaria (*Fig* 10.1) differisce significativamente da quello riportato in *Fig* 9.10. In particolare il collasso gravitazionale standard non porta alla formazione di una singolarità futura piena come si è visto nel caso inflazionario. L'obiettivo è dunque

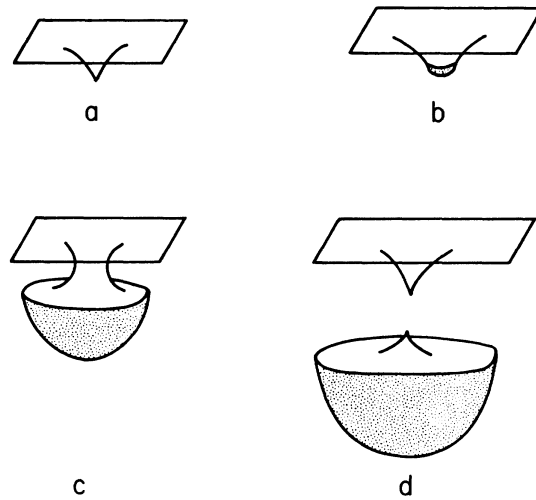


Figura 9.11: L'evoluzione di soluzioni di tipo  $E$ . Le superfici tridimensionali tipo-spazio indicate in *Fig* (9.10) sono state disegnate sopprimendo una dimensione spaziale e immergendole in uno spazio tridimensionale. La regione di de Sitter è indicata dall'ombreggiatura. Nella configurazione  $d$  è possibile notare che la regione in stato di inflazione si è staccata dallo spazio-tempo originale ed è contenuta in un universo isolato contenente anche una regione di Schwarzschild.

determinare se è possibile impostare una configurazione di condizioni iniziali corrispondenti a ipersuperfici tipo tempo non singolari come le ipersuperfici  $b$  o  $c$  di *Fig* 9.10. Si noti che non esiste alcuna barriera topologica alla costruzione di tali condizioni iniziali in quanto la *Fig* 9.10 mostra che tali superfici sono equivalenti ad uno spazio euclideo tridimensionale. E' tuttavia possibile mostrare che, almeno nel caso di simmetria sferica, la singolarità iniziale non può essere evitata. Intuitivamente il risultato mostra come la velocità esterna richiesta per la soluzione monotona è talmente elevata che può emergere solamente da una singolarità. Tali considerazioni, comunque, mantengono al giorno d'oggi un carattere fortemente speculativo. Nonostante tutte le difficoltà teoriche e sperimentali e la necessità di approfondimenti su entrambi i fronti, i PBH godono di una struttura teorica ed osservativa che rende la loro esistenza quantomeno plausibile.

# Capitolo 10

## Formalismi Misner-Sharp e Hernandez-Misner

Nel precedente capitolo si è esposto un semplice modello di formazione dei PBH. Nel presente capitolo si espongono due ulteriori modelli (tratti da J. Bloomfield et al.<sup>[20]</sup>) più complessi ed attualmente impiegati nello studio dei PBH, tali modelli non consentono una soluzione analitica e richiedono l'impiego di simulazioni numeriche. L'universo primordiale viene assunto come un plasma generalmente isotropo ed omogeneo con piccole perturbazioni originate da fluttuazioni quantistiche. Se le perturbazioni primordiali sono sufficientemente grandi è possibile che collassino, sotto l'azione della loro stessa attrazione gravitazionale, formando i PBH. Tale processo richiede che le perturbazioni crescano a scale non lineari. Lo scenario standard dell'inflazione prevede perturbazioni Gaussiane invarianti per scala di ampiezza  $\sim 10^{-5}$  il che significa che la formazione di perturbazioni non lineari è altamente improbabile. E', tuttavia, concepibile l'esistenza di caratteristiche dello spettro di potenza inflazionario a piccole lunghezze d'onda, ben al disotto delle scale della radiazione cosmica di fondo, che permettano alle perturbazioni di divenire non lineari ed avviare il collasso.

### 10.1 Formalismo Misner-Sharp

Le recenti simulazioni idrodinamiche della formazione di PBH sono basate sul formalismo Misner-Sharp, il quale descrive il collasso gravitazionale di un fluido termodinamico dotato di simmetria sferica. Uno spazio-tempo gode di simmetria sferica se possiede un gruppo di isometria  $SO(3)$ , l'azione di tale gruppo su ogni punto fornisce sfere bidimensionali. La metrica dello spazio-tempo induce una metrica bidimensionale su ognuna di tali sfere, tale metrica dovrà essere proporzionale alla metrica di una 2-sfera di raggio unitario

$$d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2 \quad (10.1)$$

Domandando che l'intera metrica goda di simmetria sferica essa può essere scritta come

$$ds^2 = g_{AB}dx^A dx^B + R^2(x^A)d\Omega^2 \quad (10.2)$$

dove  $x^0$  e  $x^1$  sono coordinate arbitrarie e la metrica bidimensionale  $g_{AB}$  dipende solamente da esse. Data la libertà di scelta delle coordinate si sceglie di porre  $g_{01} = 0$  in modo da rendere la metrica diagonale, si scelgono poi le coordinate  $t$  ed  $A$  come

$$ds^2 = e^{2\phi}dt^2 - e^\lambda dA^2 - R^2 d\Omega^2 \quad (10.3)$$

dove  $\phi$ ,  $\lambda$  ed  $R$  sono funzioni solamente di  $A$  e  $t$ , si impone inoltre che  $R$  sia una funzione monotona di  $A$ .

Il contenuto di tale spazio-tempo è un fluido perfetto descritto dal tensore energia-impulso

$$T_{\mu\nu} = (\rho + P)u_\mu u_\nu + P g_{\mu\nu} \quad (10.4)$$

dove  $\rho$  è la densità di energia,  $P$  è la pressione e  $u^\mu$  è la quadri-velocità del fluido. E' utile scegliere le coordinate comovienti con il fluido dette anche coordinate Lagrangiane. La quadri-velocità è data da

$$u^t = e^{-\phi}, \quad u^i = 0; \quad i = r, \theta, \phi \quad (10.5)$$

Si passa ora allo studio dell'equazione di Einstein  $G_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu}$ , dove si è posto  $G = c = 1$ . Le componenti tempo-tempo, raggio-raggio e tempo-raggio dell'equazione sono le seguenti dove l'apostrofo e il punto indicano rispettivamente le derivate rispetto  $A$  ed  $e$

$$\begin{cases} 8\pi e^{2\phi}\rho = \frac{1}{R^2} \left( e^{2\phi} + \dot{R}^2 - e^{\lambda+2\phi} (R')^2 \right) + \frac{e^{-\lambda}}{R} \left( e^\lambda \dot{R} \dot{\lambda} + e^{2\phi} R' \lambda' - 2e^{2\phi} R'' \right) \\ 8\pi e^\lambda P = \frac{1}{R^2} \left[ (R')^2 + 2RR'\phi' - e^{\lambda-2\phi} \left( e^{2\phi} + \dot{R}^2 - 2R\dot{R}\dot{\phi} + 2R\ddot{R} \right) \right] \\ 0 = \frac{\dot{\lambda} + 2\dot{R}\phi' - 2\dot{R}'}{R} \end{cases} \quad (10.6)$$

Eccellenza fatta per le componenti  $\theta\theta$  e  $\phi\phi$  tutte le altre componenti dell'equazione di Einstein si annullano. Le componenti angolari sono correlate con l'equazione di conservazione del tensore energia-impulso e possono essere trascurate in favore di questa, più semplice, equazione. Si utilizza ora l'equazione di conservazione del tensore energia-impulso,  $\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0$ . Le componenti  $t$  ed  $r$  di tale equazione sono

$$\begin{cases} 0 = 2R\dot{\rho} + (P + \rho)(4\dot{R} + \dot{\lambda}R) \\ 0 = P' + (\rho + P) \end{cases} \quad (10.7)$$

mentre la componenti  $\theta$  e  $\phi$  si annullano. Le seguenti definizioni consentono di scrivere l'equazione del moto in modo più conveniente

$$\begin{cases} U = e^{-\phi} \dot{R} \\ \Gamma = e^{-\lambda/2} R' \\ m = 4\pi \int_0^A \rho R^2 R' dA \end{cases} \quad (10.8)$$

$U$  è la coordinata velocità di un elemento di fluido ma non è una velocità fisica.  $\Gamma$  è semplicemente una variabile alternativa per  $\lambda$  ed è necessariamente positiva, vista la natura monotona di  $R$ . Infine  $m$  è la massa di Misner-Sharp, una misura della massa contenuta entro il raggio  $A$ , anch'essa è monotona in  $A$ . Saranno utili anche le seguenti relazioni

$$\begin{cases} e^{-\phi}\ddot{R} = \dot{U} + U\dot{\phi} \\ e^{-\lambda/2}R'' = \Gamma' + \frac{1}{2}\Gamma\lambda' \\ m' = 4\pi R^2 R' \rho \end{cases} \quad (10.9)$$

Si riscrivono ora le cinque equazioni del moto utilizzando le suddette definizioni. Risolvendo per  $\phi'$  la seconda equazione della coppia (10.7) si ottiene

$$\phi' = -\frac{P'}{\rho + P} \quad (10.10)$$

E' possibile riscrivere la terza equazione di (10.6) come

$$\dot{\lambda}R' = 2(\dot{R}' - \dot{R}\phi') \rightarrow \dot{\lambda} = \frac{2e^{\phi}U'}{R'} \quad (10.11)$$

Combinando la prima equazione di (10.6) con le prime due equazioni di (10.8) e la seconda di (10.9) è possibile ottenere

$$8\pi\rho R^2 R' = \frac{d}{dA}((1 + U^2 - \Gamma^2)R) \quad (10.12)$$

Integrando tale equazione da 0 ad  $A$ , imponendo la condizione al contorno  $R(t, 0) = 0$  ed utilizzando la terza definizione di (10.8) si trova

$$\Gamma^2 = 1 + U^2 - \frac{2m}{R} \quad (10.13)$$

Moltiplicando ora la prima equazione di (10.7) per  $2\pi R R'$  e sostituendola in (10.11) si ottiene

$$0 = \frac{d}{dt}(4\pi\rho R^2 R') + 4\pi \frac{d}{dA}(P R^2 \dot{R}) \quad (10.14)$$

Integrando tale equazione rispetto alla coordinata radiale da 0 ad  $A$  ed utilizzando la prima e la terza equazione di (10.8) si ottiene

$$\dot{m} = -e^{\phi}4\pi R^2 P U \quad (10.15)$$

dove si è nuovamente applicata la condizione al contorno  $R(t, 0) = 0$ . Sostituendo le prime due equazioni di (10.8) e la prima di (10.9) nella seconda di (10.6) si ottiene

$$2e^{-\phi}R\dot{U} = \Gamma^2 - 1 - U^2 + 2\Gamma^2 R \frac{\phi}{R'} - 8\pi P R^2 \quad (10.16)$$

Tale equazione è semplificabile utilizzando le equazioni (10.10) e (10.13)

$$\dot{U} = -e^\phi \left( \Gamma^2 \frac{P'}{R'(\rho + P)} + \frac{m + 4\pi P R^3}{R^2} \right) \quad (10.17)$$

Così facendo si sono ottenute le sei equazioni che costituiscono il formalismi di Misner-Sharp. Tre equazioni sono equazioni di evoluzione per  $R$ ,  $m$  e  $U$  (la prima equazione di (10.8), la (10.15) e la 10.17) e tre equazioni sono vincoli su  $\rho$ ,  $\phi$  e  $\Gamma$  (la terza equazione di (10.9), la (10.10) e la (10.13)). Insieme tali equazioni esprimono il contenuto dell'equazione di Einstein in un modo conveniente per l'implementazione numerica.

Il sistema dev'esser supportato da un equazione di stato per  $P$ . Nell'universo primordiale è possibile considerare la pressione come funzione della sola densità energetica, si utilizzerà  $P = P_0 + Q$  dove  $Q$  è una viscosità artificiale imposta al fine di eliminare i possibili shock nel fluido. La pressione fisica è data da  $P = P_0 = w\rho$  dove  $w = 1/3$ .

Per completare il formalismo si specificano ora le condizioni al contorno. Nella derivazione delle equazioni si è utilizzata la condizione  $R(t, 0) = 0$ . Per definizione di  $U$  ed  $m$  si avrà  $U(t, 0) = m(t, 0) = 0$ . Per la simmetria sferica invece si avrà  $\rho'(t, 0) = P'(t, 0) = 0$  e dunque  $\phi'(t, 0) = 0$ . Utilizzando la regola di Hopital è possibile ricavare

$$\lim_{A \rightarrow 0} \Gamma^2 = 1 - \lim_{A \rightarrow 0} \frac{8\pi\rho R^2 R'}{R'} = 1 \quad (10.18)$$

L'ultima condizione al contorno rimanente richiede la specificazione di  $\phi$  ad uno dei limiti. Questa è semplicemente una condizione di gauge sulla coordinata temporale e di solito viene impostata imponendo un comportamento asintotico.

Le condizioni iniziali devono essere imposte per ognuna delle variabili evolutive:  $m(t_0, A)$ ,  $U(t_0, A)$  e  $R(t_0, A)$ . Le prime due corrispondono alla densità di energia locale ed alla velocità del fluido mentre l'ultima è la condizione di gauge iniziale. Il fluido fornisce l'unico grado di libertà dinamico; la condizione di gauge si evolve semplicemente col tempo come dettato dal fluido. Per semplicità si riassumono le equazioni di Misner-Sharp

$$\begin{cases} \dot{R} = Ue^\phi \\ \dot{m} = -e^\phi 4\pi R^2 P U \\ \dot{U} = -e^\phi \left( \frac{\Gamma^2 P'}{R'(\rho + P)} + \frac{m}{R^2} + 4\pi R P \right) \\ \rho = \frac{m'}{4\pi R^2 R'} \\ \phi' = -\frac{P'}{\rho + P} \\ \Gamma^2 = 1 + U^2 - \frac{2m}{R} \end{cases} \quad (10.19)$$

Le condizioni al contorno sono  $R(t, 0) = U(t, 0) = m(t, 0) = 0$  e  $\Gamma(t, 0) = 1$  con un arbitraria condizione al contorno (non nulla)  $\rho_{\text{ref}}(t)$ . Per convenienza si include anche la seguente espressione

$$\dot{\rho} = -(\rho + P)e^\phi \left( 2\frac{U}{R} + \frac{U'}{R'} \right) \quad (10.20)$$

Se si annulla la viscosità artificiale è possibile integrare l'espressione per  $\phi'$  ed ottenere

$$e^\phi = \left( \frac{\rho_{\text{ref}}}{\rho} \right)^{w/(1+w)} \quad (10.21)$$

dove  $\rho_{\text{ref}}$  è una densità di riferimento relazionata alla condizione di contorno su  $\phi$ . Tale formula è utile per lo studio analitico.

## 10.2 Applicazioni cosmologiche del formalismo Misner-Sharp

Il formalismo di Misner-Sharp venne ideato inizialmente per studiare il collasso stellare, dove la pressione si annulla ad un certo raggio e la metrica è connessa con continuità alla metrica di Schwarzschild. In cosmologia nè la pressione nè la densità di energia si annullano a grandi raggi e lo spazio-tempo non è asintoticamente piatto. In questa sezione si utilizza il formalismo di Misner-Sharp per descrivere l'evoluzione cosmologica.

### 10.2.1 Evoluzione del background

L'evoluzione del background cosmologico richiede che la densità di energia sia costante nello spazio:  $\rho'_b = 0$  dove il pedice  $b$  indica il valore di background nell'universo Friedmann-Robertson-Walker (FRW). Dall'equazione per  $\phi'$ , ignorando la viscosità artificiale segue che  $\phi'_b = 0$ . Scegliendo appropriatamente le condizioni al contorno è possibile imporre  $\phi_b = 0$ . Ciò fornisce  $\rho_{\text{ref}} = \rho_b$ . La quarta equazione di (10.19) può essere integrata per ottenere

$$m_b = \frac{4\pi}{3} \rho_b R_b^3 \quad (10.22)$$

Usando questi risultati l'evoluzione delle equazioni (10.19) diviene

$$\begin{cases} \dot{R}_b = U_b \\ \dot{\rho}_b = -3 \frac{\dot{R}_b}{R_b} \rho_b (1 + w) \\ \dot{U}_b = -\frac{4\pi}{3} \rho_b R_b (1 + 3w) \end{cases} \quad (10.23)$$

Si noti che non sono presenti derivate spaziali, ergo l'evoluzione di ogni funzione è indipendente da  $A$ . In particolare ciò permette di scrivere  $R_b(A, t) = a(t)A$  dove si è sfruttata l'invarianza per riparametrizzazioni per scrivere  $R_b(A, t_0) = A$  selezionando  $a(t_0) = 1$ . La funzione  $a(t)$  è il fattore di scala della metrica FRW. Sostituendo la nuova parametrizzazione di  $R$  nelle equazioni del moto si ottiene

$$\begin{cases} \dot{\rho}_b = -3 \frac{\dot{a}}{a} \rho (1 + w) \\ U_b = A \dot{a} \\ \dot{U}_b = -\frac{4\pi}{3} \rho_b a A (1 + 3w) \end{cases} \quad (10.24)$$

La prima di tali equazioni è l'equazione di continuità cosmologica, mentre le ultime due possono essere combinate ottenendo

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi}{3}\rho_b(1+3w) \quad (10.25)$$

che è l'equazione di accelerazione. Combinando quest'ultima con l'equazione di continuità si può scrivere

$$\partial_t(\dot{a}^2) = \frac{8\pi}{3}\partial_t(\rho_b a^2) \quad (10.26)$$

la quale integrata da

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 \equiv H^2 = \frac{8\pi}{3}\rho_b - \frac{k}{a^2} \quad (10.27)$$

per una costante d'integrazione  $k$ ,  $H$  è detto parametro di Hubble. Questa è l'equazione di Friedmann con curvatura spaziale  $k$ . E' possibile moltiplicare tale equazione per  $R_b^2$  ed applicarla all'equazione per  $U_b$  per ottenere

$$U_b^2 = \frac{2m_b}{R_b} - kA^2 \quad (10.28)$$

e dunque

$$\Gamma_b^2 = 1 - kA^2 \quad (10.29)$$

la metrica diviene dunque la metrica di FRW

$$ds^2 = dt^2 - a(t)^2 \left( \frac{dA^2}{1 - kA^2} + A^2 d\Omega^2 \right) \quad (10.30)$$

dove si è utilizzato  $e^\lambda = R'^2/\Gamma^2$ , il formalismo Misner-Sharp porta dunque all'evoluzione cosmologica FRW. Si ponga  $k = 0$  (universo FRW piatto). E' possibile risolvere l'equazione di evoluzione del background come segue: l'equazione di continuità viene integrata per ottenere

$$\rho_b = \rho_0 a^{-3(1+w)} \quad (10.31)$$

dove  $\rho_0$  è la densità di energia FRW al tempo  $t_0$ . L'equazione di Friedmann diviene dunque

$$\dot{a} = \sqrt{\frac{8\pi\rho_0}{3}} a^{1-1/\alpha} \quad (10.32)$$

dove si è definito  $\alpha = 2/3(1+w)$ . Tale equazione una volta integrata fornisce

$$\alpha (a^{1/\alpha} - 1) = \sqrt{\frac{8\pi\rho_0}{3}} (t - t_0) \quad (10.33)$$



dove si è utilizzata la condizione al contorno  $a(t_0 = 1)$  e si è assunto  $w \neq -1$ . E' utile porre

$$t_0 = \alpha \sqrt{\frac{3}{8\pi\rho_0}} \quad (10.34)$$

così che

$$a = \left(\frac{t}{t_0}\right)^\alpha \quad (10.35)$$

Il parametro di Hubble è dato da

$$H = \frac{\alpha}{t} \quad (10.36)$$

## 10.3 Oltre il background

In questa sezione le equazioni del formalismo Misner-Sharp verranno riscritte in modo più efficiente dal punto di vista numerico. Siano

$$\begin{cases} R = aA\bar{R} \\ \rho = \rho_b\bar{\rho} \\ m = \frac{4\pi}{3}\rho_b R^3\bar{m} \\ U = HR\bar{U} \\ P = \rho_b\bar{P} = \rho_b\bar{\rho}(w + \bar{Q}) \end{cases} \quad (10.37)$$

dove le quantità barrate sono funzioni e valgono uno per l'evoluzione FRW,  $\bar{Q}$  è una funzione che rappresenta la viscosità artificiale e si annulla nell'evoluzione FRW. Utilizzando tali notazioni le equazioni Misner-Sharp divengono

$$\begin{cases} \phi' = -\frac{\bar{P}'}{\bar{\rho} + \bar{P}} \\ \frac{1}{H}\dot{\bar{R}} = \bar{R}(\bar{U}e^\phi - 1) \\ \bar{\rho} = \bar{m} + \frac{A\bar{R}}{3(A\bar{R})'}\bar{m}' \\ \frac{1}{H}\dot{\bar{m}} = \frac{2}{\alpha}\bar{m} - 3\bar{U}e^\phi(\bar{P} + \bar{m}) \\ \Gamma^2 = 1 + H^2R^2(\bar{U}^2 - \bar{m}) \\ \frac{\dot{\bar{U}}}{H} = \frac{\bar{U}}{\alpha} - e^\phi \left[ \Gamma^2 \frac{\bar{P}'}{H^2 R R' (\bar{\rho} + \bar{P})} + \frac{1}{2}(2\bar{U}^2 + \bar{m} + 3\bar{P}) \right] \end{cases} \quad (10.38)$$

In tale sistema si è fatto ampio uso delle espressioni di background e delle equazioni di continuità e di Friedmann. Ai fini dell'evoluzione numerica è utile lavorare con la seguente variabile

$$\xi = \ln\left(\frac{t}{t_0}\right) = \frac{1}{\alpha} \ln a \quad (10.39)$$

così che

$$\partial_t = \frac{H}{\alpha} \partial_\xi \quad (10.40)$$

E' possibile esprimere i fattori di scala e di Hubble in funzione di  $\xi$  come segue

$$\begin{cases} a = e^{\alpha\xi} \\ H = \frac{\alpha}{t_0} e^{-\xi} = \frac{1}{R_H} e^{-\xi} \end{cases} \quad (10.41)$$

Dove è stato definito  $R_H = t_0/\alpha$  il quale è il raggio dell'orizzonte degli eventi all'inizio dell'evoluzione. Sarà utile in seguito notare le seguenti relazioni:

$$HaR_H = e^{\alpha-1}\xi \quad (10.42)$$

il raggio dell'orizzote evolve come

$$R_H(\xi) = \frac{1}{H} = R_H e^\xi \quad (10.43)$$

e l'equazione di Friedmann può essere scritta come

$$H^2 = \frac{8\pi}{3} \rho_b = \frac{e^{-2\xi}}{R_H^2} \quad (10.44)$$

E' inoltre utile definire  $A = \bar{A}R_H$  dove  $\bar{A}$  è adimensionale. Utilizzando tali variabili e la definizione (10.38) le equazioni del moto risulteranno

$$\begin{cases} \phi' - \frac{\bar{P}'}{\bar{\rho} + \bar{P}} \\ \partial_\xi \bar{R} = \alpha \bar{R} (\bar{U} e^\phi - 1) \\ \bar{\rho} = \bar{m} + \frac{\bar{A}\bar{R}}{3(\bar{A}\bar{R})'} \bar{m}' \\ \partial_\xi \bar{m} = 2\bar{m} - 3\alpha \bar{U} e^\phi (\bar{P} + \bar{m}) \\ \bar{\Gamma}^2 = \frac{\alpha^2}{a^2 H^2 R_H^2} = e^{2(1-\alpha)\xi} + \bar{A}^2 \bar{R}^2 (\bar{U}^2 - \bar{m}^2) \\ \partial_\xi \bar{U} = \bar{U} - \alpha e^\phi \left[ \bar{\Gamma}^2 \frac{\bar{P}'}{\bar{A}\bar{R}(\bar{R} + \bar{A}\bar{R}')(\bar{\rho} + \bar{P})} + \frac{1}{2}(2\bar{U}^2 + \bar{m} + 3\bar{P}) \right] \end{cases} \quad (10.45)$$

Qui l'apostrofo indica le derivate rispetto  $\bar{A}$ . Quando la viscosità artificiale si annulla si avrà

$$e^\phi = \bar{\rho}^{-3\alpha w/2} \quad (10.46)$$

Tali equazioni sono completate dalle condizioni al contorno  $\bar{\rho}' = 0$ ,  $\bar{R}' = 0$ ,  $\bar{m}' = 0$  e  $\bar{U}' = 0$  per  $\bar{A} = 0$ . Le condizioni iniziali consistono nello specificare i valori di  $\bar{m}$ ,  $\bar{R}$  e  $\bar{U}$  al tempo  $\xi = 0$ . Le equazioni (10.46) sono le equazioni complete adimensionali di Misner-Sharp.

## 10.4 Formazione di buchi neri

Per comprendere quando una perturbazione cresce fino a creare un buco nero si studia la creazione di un orizzonte apparente il quale, se rilevato, indica la presenza di un orizzonte degli eventi. Si definiscono  $n^\mu$  il vettore tipo-tempo unitario ortogonale a tagli dello spazio-tempo di  $t$  costante e  $s^\mu$  il vettore tipo-spazio unitario ortogonale a tagli di  $A$  costante. Insieme tali vettori definiscono il vettore nullo uscente  $k^\mu = (n^\mu + s^\mu/\sqrt{2})$ . Nella metrica usata tale vettore risulta  $k^\mu = (e^{-\phi}, e^{-\lambda/2}, 0, 0)/\sqrt{2}$ .

L'espansione della geodetica radiale uscente è dato da  $\Theta = m^{\mu\nu}\nabla_\mu k_\nu$  dove  $m^{\mu\nu} = g^{\mu\nu} + n^\mu n^\nu - s^\mu s^\nu$  è la metrica bidimensionale dell'ipersuperficie di  $t$  ed  $A$  costanti. Un orizzonte apparente si forma per  $\Theta \leq 0$ . È noto che

$$\Theta = \frac{1}{4\pi R^2} k^\mu \nabla_\mu (4\pi R^2) \quad (10.47)$$

per uno spazio-tempo a simmetria sferica. Per la metrica qui usata si ha

$$\Theta = \frac{\sqrt{2}}{R} (U + \Gamma) \quad (10.48)$$

La condizione per la formazione di un orizzonte apparente è  $U + \Gamma \leq 0$ . Poichè  $\Gamma > 0$ ,  $U$  dev'essere negativo. Utilizzando l'equazione (10.13) la condizione di formazione di un buco nero diviene

$$\frac{2m}{R} \geq 1 \quad (10.49)$$

la quale è riconoscibile come l'ammontare di massa all'interno di un raggio  $R$  inferiore al raggio di Schwarzschild. Utilizzando l'ultima equazione di (10.37) e l'equazione di Friedmann si ottiene

$$H^2 R^2 \bar{m} \geq 1 \quad (10.50)$$

la quale scritta in termini delle variabili utilizzate diviene

$$\bar{R}^2 \bar{m} \bar{A}^2 e^{2(\alpha-1)\xi} \geq 1 \quad (10.51)$$

Pertanto, condizioni  $U < 0$  e (10.51) sono le condizioni sotto cui si forma un buco nero. Dopo l'apparizione di un orizzonte apparente appare anche una singolarità poco dopo.

## 10.5 Formalismo Hernandez-Misner

Sebbene il formalismo di Misner-Sharp sia estremamente utile per lo studio numerico di spazi-tempo a simmetria sferica fallisce nell'eventualità che si formi una singolarità, il che se applicato allo studio dei PBH lo rende inadatto a prevedere la massa finale. Per affrontare la formazione di una singolarità, Hernandez e Misner svilupparono un

formalismo che utilizza raggi di luce radiali per definire la coordinata temporale. L'idea è quella di definire la coordinata temporale in funzione del tempo che un raggio di luce radiale, partendo da un dato evento, raggiunge un osservatore distante. Poichè il tempo scorre più lentamente in un pozzo gravitazionale, in tale sistema di riferimento, occorre un tempo infinito per la formazione di un orizzonte degli eventi e dunque la singolarità non si forma mai. Si definisce una nuova coordinata  $u$  a partire dalla seguente relazione differenziale

$$e^\psi du = e^\phi dt - e^{\lambda/2} dA \quad (10.52)$$

dove  $e^\psi$  è un fattore di integrazione utilizzato per rendere  $du$  un differenziale esatto. Si noti che se  $du = 0$  allora  $e^\phi dt = e^{\lambda/2} dA$ . Di conseguenza, lungo un cammino tale che  $d\theta = d\phi = 0$ , si ha, per via dell'equazione (10.3) che  $ds^2 = 0$ . Dunque  $du = 0$  implica

$$\frac{dA}{dt} = e^{\phi-\lambda/2} \quad (10.53)$$

Insieme tali relazioni mostrano che  $u$  è una coordinata nulla uscente.  $u$  corrisponde a ciò che vede un osservatore all'infinito guardando verso l'origine. Sostituendo l'equazione (10.53) nella metrica (10.3) si trova che

$$ds^2 = -e^{2\psi} du^2 - 2e^{\psi+\lambda/2} du dA + R^2 d\Omega^2 \quad (10.54)$$

L'equazione del moto può essere ricavata come segue. Si definiscono i seguenti operatori invarianti

$$D_t = u^\mu \partial_\mu, \quad D_r = v^\mu \partial_\mu \quad (10.55)$$

Dove  $u^\mu = (e^{-\phi}, 0, 0, 0)$  è la quadrivelocità comovente con il fluido e  $v^\mu = (0, e^{-\lambda/2}, 0, 0)$  è la stessa nel sistema di coordinate Misner-Sharp. Utilizzando la metrica (10.3) e la forma di tali operatori nel sistema di Misner-Sharp, è possibile notare che  $D_t$  è la derivata rispetto al tempo proprio ad una coordinata spaziale fissata, e  $D_r$  è la derivata rispetto alla lunghezza propria a tempo ed angoli fissati. E' possibile scrivere le equazioni di Misner-Sharp in termini di tali operatori

$$\begin{cases} D_t R = U \\ D_t m = -4\pi R^2 P U \\ D_t U = -\left(\frac{\Gamma D_r P}{\rho + P} + \frac{m + 4\pi R^3 P}{R^2}\right) \\ D_r m = 4\pi \rho R^2 D_r R \\ \Gamma^2 = 1 + U^2 - \frac{2m}{R} \end{cases} \quad (10.56)$$

Dove si è utilizzato  $\Gamma = e^{-\lambda/2} R' = D_r R$  e si è omessa l'equazione per  $\phi'$  in quanto tale variabile non compare nel formalismo di Hernandez-Misner. Osservando le proprietà di trasformazione della metrica emerge che il raggio  $R$  è un invariante per trasformazioni

di coordinate, sia  $\rho$  che  $P$  sono quantità scalari, gli operatori  $D_t$  e  $D_r$  sono invarianti per costruzione e dunque anche  $U$  risulterà invariante. Di conseguenza anche  $m$  sarà invariante per trasformazioni di coordinate come si può dedurre dalla seconda equazione di (10.56). Per giungere alle equazioni dinamiche nel sistema di coordinate Hernandez-Misner è sufficiente sostituire le espressioni appropriate per  $D_t$  e  $D_r$  nelle equazioni (10.56), tali derivate divengono

$$D_t = e^{-\psi} \partial_\mu, \quad D_r = e^{-\lambda/2} \partial_A - e^{-\psi} \partial_\mu \quad (10.57)$$

Sostituendo tali espressioni nelle equazioni (10.56) si giunge a

$$\begin{cases} \dot{R} = e^\psi U \\ \dot{m} = -e^\psi 4\pi R^2 P U \\ \dot{U} = -\frac{e^\psi}{1-w-\bar{Q}} \left[ \Gamma e^{-\lambda/2} \frac{P'}{\rho+P} + \frac{m+4\pi R^3 P}{R^2} - \frac{\Gamma \rho}{\rho+P} e^{-\psi} \dot{\bar{Q}} + (w + \bar{Q}) \left( 2\frac{U\Gamma}{R} + e^{-\lambda/2} U' \right) \right] \\ \rho = \frac{e^{-\lambda/2} m}{4\pi R^2 (\Gamma - (w+\bar{Q})U)} = \frac{m'}{4\pi R^2 R'} \frac{\Gamma+U}{\Gamma - (w+\bar{Q})U} \\ \Gamma^2 = 1 + U^2 - \frac{2m}{R} \\ e^{\lambda/2} = \frac{R'}{\Gamma+U} \end{cases} \quad (10.58)$$

Dove i punti indicano le derivate rispetto ad  $u$  e gli apostrofi le derivate rispetto ad  $A$ . Il sistema (10.58) è incompleto e si richiede dunque un'equazione per calcolare  $\psi$ . Poichè  $du$  è un differenziale esatto si può scrivere

$$\partial_t \partial_A u = \partial_A \partial_t u \quad (10.59)$$

ed usando le relazione (10.52) si ottiene

$$(D_t + D_r)\psi = D_r \phi + \frac{1}{2} D_t \lambda \quad (10.60)$$

Si noti poi che è possibile riscrivere la seconda equazione di (10.7) come

$$D_r \phi = -\frac{D_r P}{\rho + P} \quad (10.61)$$

e la seconda equazione di (10.11) come

$$D_t \lambda = \frac{2D_r U}{\Gamma} \quad (10.62)$$

La quantità  $D_k \equiv D_t + D_r = e^{-\lambda/2} \partial_A$  è la derivata lungo un raggio nullo uscente. Combinando tutti questi risultati è possibile scrivere l'equazione (10.60) come

$$\Gamma D_k \psi = D_k U + \frac{m}{R^2} + 4\pi R P \quad (10.63)$$

dove si è impiegata la terza equazione di (10.56). Tuttavia questa non è la miglior equazione con cui lavorare. Applicando invece  $D_k$  alla quinta equazione di (10.58) si ottiene

$$\Gamma D_k \Gamma = U D_k U + \frac{D_k R m}{R^2} - \frac{D_k m}{R} \quad (10.64)$$

sostituendo  $D_k m$  dalla quarta equazione di (10.57) e  $m/R^2$  dalla (10.63) e  $D_k R = U + \Gamma$  si ottiene.

$$e^\psi D_k [e^{-\psi}(\Gamma + U)] = -4\pi R(\rho + P) \quad (10.65)$$

o alternativamente

$$\partial_A [e^{-\psi}(\Gamma + U)] = -e^{\lambda/2-\psi} 4\pi R(\rho + P) \quad (10.66)$$

Quando viene combinata con appropriate condizioni al contorno tale equazione chiude il sistema di equazioni di Hernandez-Misner. Numerose condizioni al contorno del formalismo di Hernandez-Misner sono invarianti per trasformazioni di coordinate. In particolare, nell'origine,  $R(0) = 0$ ,  $m(0) = 0$  ed  $U(0) = 0$  e, come in precedenza,  $\Gamma(0) = 1$ .

Il formalismo Hernandez-Misner venne introdotto inizialmente per descrivere il collasso di un oggetto in uno spazio-tempo asintoticamente piatto. La coordinata temporale è stata scelta per essere il tempo proprio di un osservatore statico posto all'infinito nullo futuro. Poichè non si ha uno spazio-tempo asintoticamente piatto tale osservatore non esiste. Di conseguenza si pone l'osservatore sul bordo del dominio del problema. Su tale bordo si conoscono le quantità  $m$ ,  $R$ ,  $U$ ,  $\Gamma$ ,  $\rho$  e  $\lambda$  nonché le coordinate  $u$  ed  $A$ . Si assuma di conoscere il tempo cosmico corrispondente a tali  $u$  ed  $A$ . Dalla relazione (10.52), con  $dA = 0$ , si ha

$$\frac{du}{dt} = e^{\phi-\psi} \quad (10.67)$$

Una scelta di gauge conveniente prevede di imporre  $u$  corrispondente alla coordinata  $t$  del tempo cosmico, il che implica  $du/dt = 1$  e di conseguenza  $\psi = \phi$ . Dato il tempo di Misner-Sharp è possibile calcolare  $e^\psi$  al bordo:

$$e^\psi = e^\phi = \frac{\rho_b^{3\alpha_w/2}}{\rho} \quad (10.68)$$

con

$$\rho_b = \frac{3\alpha^2}{8\pi t^2} \quad (10.69)$$

dove si sono utilizzate le equazioni (10.21), (10.31) (10.34) e (10.36). Quando la densità raggiunge la densità di energia FRW si avrà  $e^\psi = 1$ . E' ora possibile mostrare che in questo sistema di coordinate l'orizzonte non si forma. La condizione di formazione di una superficie intrappolata è

$$U + \Gamma \equiv D_k R \leq 0 \quad (10.70)$$

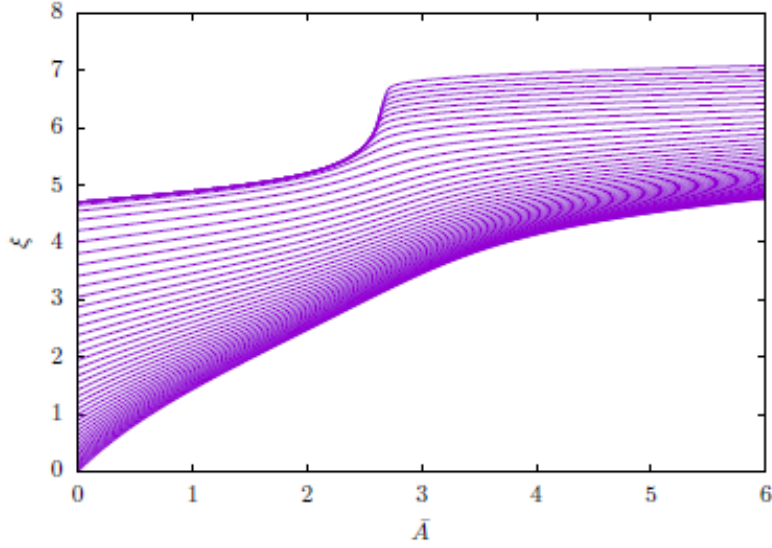


Figura 10.1: Grafico di tagli nulli nelle coordinate Misner-Sharp per condizioni iniziali che danno vita ad un buco nero. I tagli a tempo costante corrispondono a linee orizzontali.

Tale relazione rivela che il raggio  $R$  del raggio decresce. Dall'equazione (10.65) si nota che

$$D_k = [e^{-\psi D_k R}] = -e^{-\psi} 4\pi R(\rho + P) \leq 0 \quad (10.71)$$

di conseguenza  $e^{-\psi D_k R}$  cala monotonamente al crescere del raggio comoviente. Poichè tale quantità risulta positiva per l'osservatore al bordo, essa dovrà essere positiva ovunque. Di conseguenza la condizione di formazione di una superficie intrappolata non si verifica e l'orizzonte non si forma mai.

## 10.6 Estrazione della massa

La condizione di formazione di un buco nero nel formalismo di Hernandez-Misner è la medesima del formalismo Misner-Sharp:

$$\frac{2m}{R} \equiv \bar{R}^2 \bar{m} \bar{A}^2 e^{2(\alpha-1)\xi} \geq 1 \quad (10.72)$$

Tale condizione tuttavia non è mai raggiunta: quando ci si avvicina l'evoluzione viene soppressa. In *Fig* 10.2 viene mostrata la quantità  $2m/R$  in funzione del raggio, è possibile notare come la condizione di formazione del buco nero non viene mai raggiunta. Mentre l'evoluzione continua le linee continueranno ad avvicinarsi a  $2m/R = 1$  ma senza mai raggiungere tale linea. La *Fig* 10.3 mostra  $e^\psi$  in funzione del raggio, mentre ci si avvicina alla formazione del buco nero  $e^\psi$  tende rapidamente a zero. Per estrarre la massa del

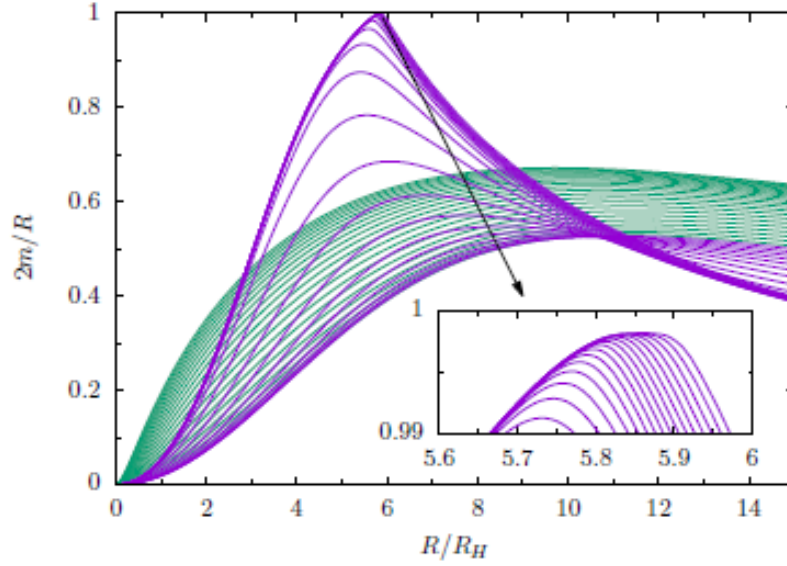


Figura 10.2:  $2m/R$  come funzione del raggio. La condizione di formazione di un buco nero è  $2m/R \geq 1$ . Le linee in verde corrispondono a tempi piccoli e quelle viola a grandi tempi.

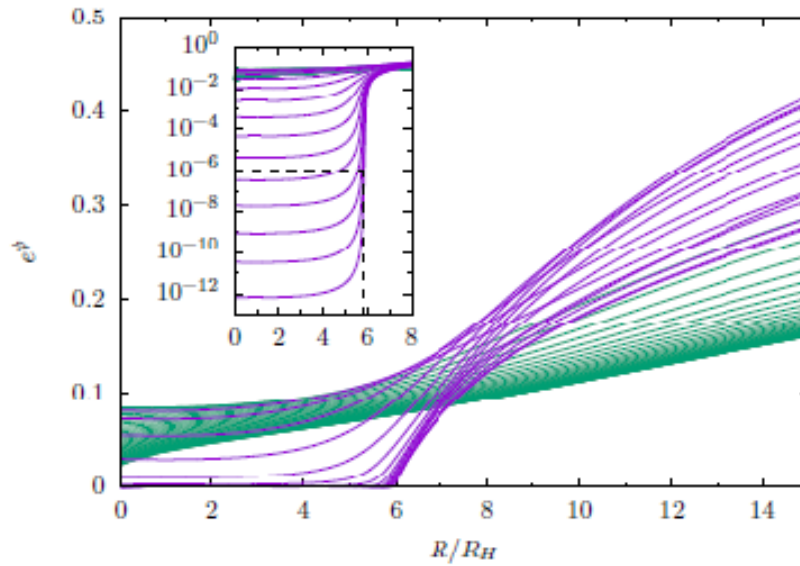


Figura 10.3:  $e^\psi$  in funzione del raggio. I colori sono utilizzati come nella figura precedente. Il sottografico mostra le medesime curve ma in scala logaritmica. La linea nera tratteggiata a  $10^{-6}$  corrisponde ad  $R_0$  per l'estrazione della massa (vedi testo)



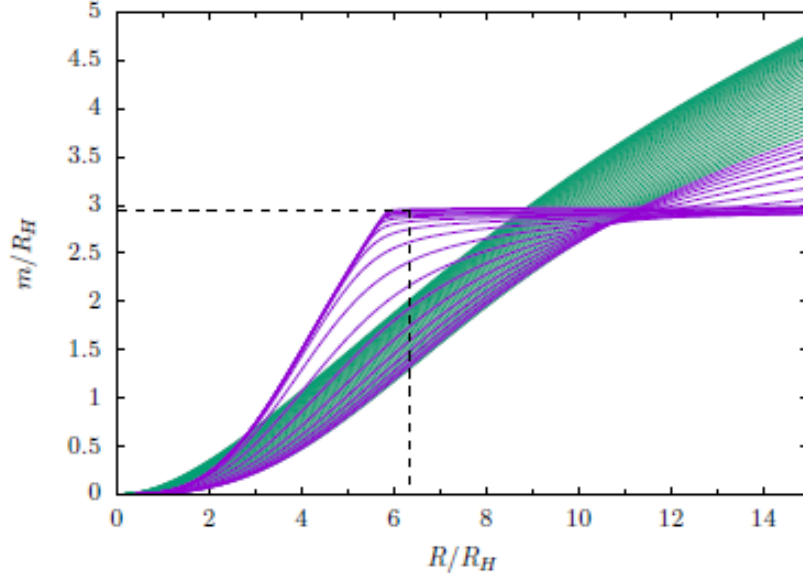


Figura 10.4: Massa compresa entro il raggio  $R$  espressa in funzione di  $R$ . I colori sono utilizzati come nelle figure precedenti. Quando il buco nero si forma risucchia tutta la materia circostante

buco nero, si identifica innanzi tutto il raggio a cui  $e^\psi$  inizia a crollare a zero, all'atto pratico è necessario scegliere un valore di riferimento. A tale valore corrisponderà un determinato raggio  $R_0$  e a tale raggio verrà estratta la massa del buco nero. In *Fig* 10.4 è rappresentata  $m(R)$  in funzione di  $R$ . Ad  $R = R_0$  è possibile leggere la massa a cui  $e^\psi$  inizia ad annullarsi. Si noti inoltre che il buco nero consuma tutta la materia circostante. Una volta che il buco nero si è formato la sua massa cresce molto lentamente come si può notare dalla pendenza leggerissima della curva di massa. Data la lentezza del processo di accrescimento tale fenomeno è trascurabile nella stima della massa finale del buco nero. In termini delle variabili utilizzate, la massa risulta essere

$$m = \frac{1}{2} e^{-\xi/2} \bar{R}^3 \bar{A}^3 \bar{m} R_H \quad (10.73)$$

Quindi, una volta noto il raggio esso può essere tradotto nel valore di  $\bar{A}$ , da quest'ultimo è possibile estrarre i valori di  $\xi$ ,  $\bar{m}$  ed  $\bar{R}$ . Si noti che la massa è stata scritta in funzione del raggio dell'orizzonte.

# Capitolo 11

## Conclusioni

Il modello proposto da Guth mostra come, almeno in linea teoricistica, sia possibile la formazione di buchi neri a partire da semplici disomogenità dell'universo primordiale. Il modello ha assunto fra le sue ipotesi la sfericità e condizioni di disomogenità molto semplici, due regioni dello spazio-tempo una di vuoto ed una di falso vuoto, le quali possono essere complicate. L'introduzione di ulteriori complicazioni rende tuttavia molto difficile la trattazione matematica, è tuttavia significativo sottolineare come il modello, per quanto semplificato, risulta essere una prima approssimazione di modelli più realistici di conseguenza i suoi risultati meritano di essere presi in considerazione. I formalismi Misner-Sharp ed Hernandez-Misner tentano invece uno studio che risulta essere applicabile alla simulazione numerica odierna. Come nel modello di Guth anche per questi formalismi si assume la presenza di disomogenità dell'universo primordiale e la simmetria sferica. Tali formalismi riescono a descrivere l'evoluzione di strutture e prevederne le masse finali sfruttando particolari sistemi di coordinate. Le previsioni delle simulazioni numeriche, tuttavia, sono ovviamente dipendenti dalle condizioni iniziali sulle quali i modelli proposti non avanzano proposte di conseguenza in funzione del modello adottato si otterranno risultati differenti. Sebbene ad oggi non esista una prova dell'esistenza di PBH il nascente campo di osservazione di onde gravitazionali risulta promettente e vi è la speranza che in futuro si possa osservare l'evaporazione di un PBH a seguito della radiazione di Hawking. Infatti, mentre i buchi neri discendenti dall'evoluzione stellare hanno una massa compresa fra qualche massa solare e qualche decina di masse solari, i PBH spaziano in un enorme intervallo di masse, in particolare i PBH aventi massa inferiore a  $M \sim 10^{12} Kg$  sono già evaporati mentre quelli più pesanti sono ancora presenti nell'universo il che fa sperare di poter osservare l'evaporazione di piccoli buchi neri i quali certamente non discendono da una stella.

# Appendice A

## Condizioni di giunzione

La derivazione delle condizioni di giunzione di Israel qui presentata segue il procedimento proposto da E. Poisson<sup>[5]</sup>

Si consideri un'ipersuperficie  $\Sigma$  che divide lo spazio-tempo in due regioni  $V^+$  e  $V^-$ . In  $V^+$  la metrica è  $g_{\alpha\beta}^+$  ed è espressa in un sistema di coordinate  $x_+^\alpha$ . In  $V^-$  invece la metrica è  $g_{\alpha\beta}^-$  ed è espressa in un sistema di coordinate  $x_-^\alpha$ . Quali sono le condizioni che devono essere imposte alla metrica affinché  $V^+$  e  $V^-$  siano congiunte con continuità su  $\Sigma$ , così che l'unione di  $g_{\alpha\beta}^+$  e  $g_{\alpha\beta}^-$  formi una soluzione valida dell'equazione di Einstein? La risposta non è semplice anche perchè nelle situazioni pratiche spesso i sistemi di coordinate  $x_\pm^\alpha$  sono differenti e non è possibile confrontare direttamente le metriche. Per aggirare questa difficoltà si costruiscono le condizioni di giunzione le quali coinvolgono solamente 3-tensori su  $\Sigma$ . Nella trattazione si assuma che  $\Sigma$  sia o di tipo tempo o di tipo spazio. Si assuma che le medesime coordinate  $y^a$  possa essere installato su entrambi i lati dell'ipersuperficie e si scelga  $n^\alpha$  il vettore unitario normale a  $\Sigma$ , il quale punta da  $V^-$  a  $V^+$ . Si supponga che un sistema continuo di coordinate  $x^\alpha$ , distinto da  $x_\pm^\alpha$ , possa essere introdotto ad entrambi i lati dell'ipersuperficie. Tali coordinate si sovrappongono a  $x_+^\alpha$  in una regione aperta di  $V^+$  contenente  $\Sigma$ , si sovrappongono anche alle coordinate  $x_-^\alpha$  in una regione aperta di  $V^-$  contenente  $\Sigma$ . Si consideri una congruenza di geodetiche che attraversi  $\Sigma$  ortogonalmente. La distanza propria (o il tempo proprio) lungo le geodetiche è parametrizzato mediante  $l$ , tale parametrizzazione è imposta in modo che si abbia  $l = 0$  quando le geodetiche intersecano  $\Sigma$ ,  $l < 0$  nella regione  $V^-$  e  $l > 0$  nella regione  $V^+$ . Un punto  $P$  identificato dalle coordinate  $x^\alpha$  è connesso a  $\Sigma$  da un membro della congruenza e  $l(x^\alpha)$  è la distanza propria (o il tempo proprio) da  $\Sigma$  a  $P$  lungo la geodetica. Tale costruzione implica che uno spostamento dall'ipersuperficie lungo una geodetica sia descritto da  $dx^\alpha = n^\alpha dl$  e che

$$n^\alpha = \epsilon \partial_\alpha l \tag{A.1}$$

si ha inoltre che  $n^\alpha n_\alpha = \epsilon$

Nella trattazione delle condizioni di giunzione si utilizzerà inoltre il formalismo delle distribuzioni. Si introduce la distribuzione di Heaviside  $\Theta(l)$

$$\Theta = \begin{cases} 1 & \text{se } l > 0 \\ 0 & \text{se } l < 0 \end{cases} \quad (\text{A.2})$$

la distribuzione è indefinita per  $l = 0$ . Le seguenti proprietà sono facilmente desumibili dalla definizione della distribuzione di Heaviside

$$\Theta^2(l) = \Theta(l), \quad \Theta(l)\Theta(-l) = 0 \quad \frac{d}{dl}\Theta(l) = \delta(l) \quad (\text{A.3})$$

dove  $\delta(l)$  è la distribuzione di Dirac. Si noti inoltre che il prodotto  $\Theta(l)\delta(l)$  non è definito come distribuzione. Infine risulterà utile la seguente notazione

$$[A] \equiv A(V^+) |_{\Sigma} - A(V^-) |_{\Sigma} \quad (\text{A.4})$$

dove  $A$  è una generica quantità tensoriale definita su entrambi i lati dell'ipersuperficie;  $[A]$  esprime il "salto" della quantità  $A$  attraverso la superficie  $\Sigma$ . E' possibile notare le seguenti relazioni

$$[n^\alpha] = 0 \quad [e_a^\alpha] = 0 \quad (\text{A.5})$$

dove  $e_a^\alpha = \partial x^\alpha / \partial y^a$ . La prima uguaglianza discende dalla relazione  $dx^\alpha = n^\alpha dl$  e dalla continuità sia di  $l$  sia di  $x^\alpha$  attraverso la superficie  $\Sigma$ , la seconda segue dal fatto che le coordinate  $y^\alpha$  sono le medesime da entrambi i lati dell'ipersuperficie

## A.1 Prima condizione di giunzione

Si esprime la metrica  $g_{\alpha\beta}$ , nelle coordinate  $x^\alpha$ , attraverso la distribuzione di Heaviside

$$g_{\alpha\beta} = \Theta(l)g_{\alpha\beta}^+ + \Theta(-l)g_{\alpha\beta}^- \quad (\text{A.6})$$

dove  $g_{\alpha\beta}^\pm$  è la metrica nelle regioni  $V^\pm$  espressa nelle coordinate  $x^\alpha$ . Per capire se la metrica così definita è una soluzione dell'equazione di Einstein è necessario verificare che le quantità geometriche costruite utilizzando  $g_{\alpha\beta}$ , come ad esempio il tensore di Riemann, siano ben definite come distribuzioni. Di conseguenza è necessario eliminare, o interpretare, i termini singolari che potrebbero apparire nella costruzione delle varie quantità. Differenziando la (A.6) si ottiene

$$g_{\alpha\beta,\gamma} = \Theta(l)g_{\alpha\beta,\gamma}^+ + \Theta(-l)g_{\alpha\beta,\gamma}^- + \epsilon\delta(l)[g_{\alpha\beta}]n_\gamma \quad (\text{A.7})$$

dove si è fatto uso della A.1. L'ultimo termine è singolare e risulta problematico nel momento in cui si tenta di esprimere i simboli di Christoffel in quanto genera termini

proporzionali a  $\Theta(l)\delta(l)$ . Per eliminare tale termine si impone la continuità della metrica attraverso l'ipersuperficie:  $[g_{\alpha\beta}] = 0$ . Tale richiesta vale solo nel sistema di coordinate  $x^\alpha$ , è tuttavia possibile esprimerla in modo indipendente dalle coordinate:

$$0 = [g_{\alpha\beta}] e_a^\alpha e_b^\beta = [g_{\alpha\beta} e_a^\alpha e_b^\beta] \quad (\text{A.8})$$

dove si è usata la A.5. Si è ottenuto

$$[h_{\alpha\beta}] = 0 \quad (\text{A.9})$$

la quale rappresenta la richiesta che la metrica indotta sia la medesima su entrambi i lati dell'ipersuperficie. Tale equazione è la prima condizione di giunzione espressa indipendentemente dal sistema di coordinate

## A.2 Seconda condizione di giunzione

Ricavare la seconda condizione di giunzione richiede un procedimento più complesso e richiede il calcolo del tensore di Riemann espresso come distribuzione. Utilizzando i risultati ottenuti in precedenza si ottiene che i simboli di Christoffel sono

$$\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha = \Theta(l)\Gamma_{\beta\gamma}^{+\alpha} + \Theta(-l)\Gamma_{\beta\gamma}^{-\alpha} \quad (\text{A.10})$$

dove  $\Gamma_{\beta\gamma}^{\pm\alpha}$  sono i simboli di Christoffel costruiti a partire da  $g_{\alpha\beta}^\pm$ . Un semplice calcolo mostra che

$$\Gamma_{\beta\gamma,\delta}^\alpha = \Theta(l)\Gamma_{\beta\gamma,\delta}^{+\alpha} + \Theta(-l)\Gamma_{\beta\gamma,\delta}^{-\alpha} + \epsilon\delta(l) [\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha] n_\delta \quad (\text{A.11})$$

da cui segue l'espressione per il tensore di Riemann

$$R_{\beta\gamma\delta}^\alpha = \Theta(l)R_{\beta\gamma\delta}^{+\alpha} + \Theta(-l)R_{\beta\gamma\delta}^{-\alpha} + \delta(l)A_{\beta\gamma\delta}^\alpha \quad (\text{A.12})$$

dove

$$A_{\beta\gamma\delta}^\alpha = \epsilon ([\Gamma_{\beta\delta}^\alpha] n_\gamma - [\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha] n_\delta) \quad (\text{A.13})$$

Il tensore di Riemann è dunque definito come una distribuzione, tuttavia il termine  $\delta(l)$  rappresenta una singolarità della curvatura su  $\Sigma$

Nonostante sia costruita mediante l'uso dei simboli di Christoffel la quantità  $A_{\beta\gamma\delta}^\alpha$  è un tensore poichè la differenza fra due simboli di Christoffel è una quantità tensoriale. Poichè la metrica è continua attraverso  $\Sigma$  nelle coordinate  $x^\alpha$  allora le sue derivate tangenziali sono anch'esse continue. Ciò significa che se  $g_{\alpha\beta,\gamma}$  è discontinua allora tale discontinuità dovrà essere diretta lungo il vettore normale  $n^\alpha$ . Deve esistere dunque un campo tensoriale  $k_{\alpha\beta}$  tale che

$$[g_{\alpha\beta,\gamma}] = k_{\alpha\beta} n_\gamma \quad (\text{A.14})$$

tale tensore è fornito esplicitamente dalla seguente relazione

$$k_{\alpha\beta} = \epsilon [g_{\alpha\beta}] n^\gamma \quad (\text{A.15})$$

L'equazione A.14 implica

$$[\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha] = \frac{1}{2} (k_\beta^\alpha n_\gamma + k_\gamma^\alpha n_\beta - k_{\beta\gamma} n^\alpha) \quad (\text{A.16})$$

da cui

$$A_{\beta\gamma\delta}^\alpha = \frac{\epsilon}{2} (k_\delta^\alpha n_\beta n_\gamma - k_\gamma^\alpha n_\beta n_\delta) \quad (\text{A.17})$$

Questo è il tensore che moltiplica la funzione  $\delta$  nel tensore di Riemann. Contraendo il primo ed il terzo indice si ottiene il tensore che moltiplica la funzione  $\delta$  nel tensore di Ricci

$$A_{\alpha\beta} \equiv A_{\alpha\mu\beta}^\mu = \frac{\epsilon}{2} (k_{\mu\alpha} n^\mu n_\beta + k_{\mu\beta} n^\mu n_\alpha - k n_\alpha n_\beta - \epsilon k_{\alpha\beta}) \quad (\text{A.18})$$

dove  $k \equiv k_\alpha^\alpha$ . Mediante un'ulteriore contrazione si ottiene la parte che moltiplica la funzione  $\delta$  dello scalare di Ricci

$$A \equiv A_\alpha^\alpha = \epsilon (k_{\mu\nu} n^\mu n^\nu - \epsilon k) \quad (\text{A.19})$$

In questo modo si è ricavato il termine  $\delta$  del tensore di Einstein e, dopo aver utilizzato l'equazione di campo di Einstein si ottiene un'espressione per il tensore energia impulso

$$T_{\alpha\beta} = \Theta(l) T_{\alpha\beta}^+ + \Theta(-l) T_{\alpha\beta}^- + \delta(l) S_{\alpha\beta} \quad (\text{A.20})$$

dove  $8\pi S_{\alpha\beta} \equiv A_{\alpha\beta} - 1/2 A g_{\alpha\beta}$ . Il primo ed il secondo termine del lato destro dell'equazione rappresentano rispettivamente il tensore-energia impulso nelle regioni  $V^+$  e  $V^-$ . L'ultimo termine si presta invece ad una chiara interpretazione: esso rappresenta una sottile distribuzione di materia, un guscio sottile posto su  $\Sigma$ . Tale guscio ha un tensore energia impulso superficiale dato da  $S_{\alpha\beta}$ . Esplicitamente il tensore energia-impulso superficiale è dato da

$$16\pi\epsilon S_{\alpha\beta} = k_{\mu\alpha} n^\mu n_\beta + k_{\mu\beta} n^\mu n_\alpha - k n_\alpha n_\beta - \epsilon k_{\alpha\beta} - (k_{\mu\nu} n^\mu n^\nu - \epsilon k) g_{\alpha\beta} \quad (\text{A.21})$$

Da ciò è possibile notare che  $S_{\alpha\beta}$  è tangente all'ipersuperficie:  $S_{\alpha\beta} n^\beta = 0$ . Tale tensore ammette anche la decomposizione

$$S^{\alpha\beta} = S^{ab} e_a^\alpha e_b^\beta \quad (\text{A.22})$$

dove  $S_{ab} = S_{\alpha\beta} e_a^\alpha e_b^\beta$  è un 3-tensore simmetrico. Tale tensore è valutato come segue

$$\begin{aligned} 16\pi S_{ab} &= -k_{\alpha\beta} e_a^\alpha e_b^\beta - \epsilon (k_{\mu\nu} n^\mu n^\nu - \epsilon k) h_{ab} \\ &= -k_{\alpha\beta} e_a^\alpha e_b^\beta - k_{\mu\nu} (g^{\mu\nu} - h^{mn} e_m^\mu e_n^\nu) h_{ab} + k h_{ab} \\ &= -k_{\alpha\beta} e_a^\alpha e_b^\beta + h^{mn} k_{\mu\nu} e_m^\mu e_n^\nu h_{ab} \end{aligned} \quad (\text{A.23})$$

D'altro canto si ha che

$$\begin{aligned}
[n_{\alpha;\beta}] &= -[\Gamma_{\alpha\beta}^{\gamma}] n_{\gamma} \\
&= -\frac{1}{2}(k_{\gamma\alpha}n_{\beta} + k_{\gamma\beta}n_{\alpha} - k_{\alpha\beta}n_{\gamma})n^{\gamma} \\
&= \frac{1}{2}(\epsilon k_{\alpha\beta} - k_{\gamma\alpha}n_{\beta}n^{\gamma} - k_{\gamma\beta}n_{\alpha}n^{\gamma})
\end{aligned} \tag{A.24}$$

La curvatura estrinseca è un importante quantità definita come

$$K_{ab} = n_{\alpha\beta} e_a^{\alpha} e_b^{\beta} \tag{A.25}$$

Tale quantità descrive la curvatura posseduta da un oggetto in relazione ad uno spazio piatto di dimensione superiore in cui è immerso. Da tale definizione segue che

$$[K_{ab}] = [n_{\alpha;\beta}] e_a^{\alpha} e_b^{\beta} = \frac{\epsilon}{2} k_{\alpha\beta} e_a^{\alpha} e_b^{\beta} \tag{A.26}$$

Unendo i vari risultati è possibile ottenere

$$S_{ab} = -\frac{\epsilon}{8\pi} ([K_{ab}] - [K] h_{ab}) \tag{A.27}$$

Tale espressione mette in relazione il tensore energia impulso superficiale con il salto della curvatura estrinseca da un lato di  $\Sigma$  all'altro. Il tensore energia impulso completo della superficie è

$$T_{\Sigma}^{\alpha\beta} = \delta(l) S^{ab} e_a^{\alpha} e_b^{\beta} \tag{A.28}$$

Si conclude dunque che una transizione regolare attraverso  $\Sigma$  richiede  $[K_{ab}] = 0$  vale a dire che la curvatura estrinseca deve essere la medesima da entrambi i lati dell'ipersuperficie. E' possibile dimostrare che  $[K_{ab}] = 0$  implica che  $A_{\beta\gamma\delta}^{\alpha} = 0$  di conseguenza tale richiesta non elimina solo la funzione  $\delta$  dal tensore di Einstein ma implica che l'intero tensore di Riemann non è singolare su  $\Sigma$ . La condizione  $[K_{ab}] = 0$  è la seconda condizione di giunzione ed è espressa indipendentemente dalle coordinate. Nell'eventualità che tale condizione sia violata allora lo spazio-tempo è singolare in  $\Sigma$ , tuttavia vi è un'interpretazione fisica: l'ipersuperficie è costituita da uno strato avente come tensore energia impulso  $T_{\Sigma}^{\alpha\beta}$ . Il tensore energia-impulso superficiale di tale guscio è

$$S_{ab} = -\frac{\epsilon}{8\pi} ([K_{ab}] - [K] h_{ab}) \tag{A.29}$$

# Bibliografia

- [1] Steven Weinberg, *Gravitation and Cosmology: principles and application of the General theory of Relativity*, John Wiley and sons, 1972
- [2] Ray d'Inverno, *Introduzione alla relatività di Einstein*, Clueb, 2001
- [3] S. W. Hawking, G. F. R. Ellis, *The large scale structure of space-time* Cambridge University Press 1973
- [4] N. D. Birrel, P. C. W. Davies, *Quantum field in curved space* Cambridge University Press 1982
- [5] Eric Poisson, *A Relativist's toolkit* University of Guelph, Ontario Press 2004
- [6] Kenta Ando, Keisuke Inomata e Masahiro Kawasaki *Primordial black holes and uncertainties in the choice of the window function*, arXiv:1802.06393v2 [astro-ph.CO] 22 May 2018
- [7] Misao Sasaki, Teruaki Suyama, Takahiro Tanaka, e Shuichiro Yokoyama *Primordial Black Holes, Perspectives in Gravitational Wave Astronomy*, arXiv:1801.05235v1 [astro-ph.CO] 16 Jan 2018
- [8] B. J. Carr *Primordial Black Holes as a Probe of Cosmology and High Energy Physics* arXiv:astro-ph/0310838v1 29 Oct 2003
- [9] Bernard Carr, Florian Kühnel e Marit Sandsta *Primordial black holes as dark matter* arXiv:1607.06077v4 [astro-ph.CO] 22 Mar 2017
- [10] Heling Deng e Alexander Vilenkin *Primordial black hole formation by vacuum bubbles* arXiv:1710.02865v2 [gr-qc] 10 Mar 2018
- [11] Bernard Carr *Primordial Black Holes: Do They Exist and Are They Useful?* arXiv:astro-ph/0511743v1 26 Nov 2005
- [12] B. J. Carr e S. W. Hawking *Black Holes in the early universe* 1974MNRAS.168.399C



- [13] B. J. Carr *Primordial Black Holes - Recent Developments* arXiv:astro-ph/0504034v1 1 Apr 2005
- [14] V.A. Berenzion, V.A. Kuzmin, I. Tkachev *Thin wall vacuum domain evolution* Physics Letters B Volume 120, Issues 1-3, 6 January 1983, Pages 91-96
- [15] S.k. Blau, E.I. Guendelman e Alan H. Guth *Dynamics of false-vacuum bubbles* Phys. Rev. D 35,1747-Published 15 March 1987
- [16] Gibbons G.W. e Hawking S.W. *Cosmological event horizons, thermodynamics, and particle creation* Physical Review D 15(6): 2738-2751 (1977)
- [17] Jemal Guven e Dario Nunez, *Schwarzschild-de Sitter space and its perturbations*, Phys. Rev. D 42, 8 (1990)
- [18] V.A. Berezin et al. *Thin-wall vacuum domain evolution* Physics Letters B 120 pag 91 ( 1983)
- [19] S.K. Blau et al. *dynamics of false-vacuum bubbles* Physical Review D 35, 1747 ( 1987 )
- [20] Jolyon Bloomfield, Daniel Bulhosa and Stephen Face *Formalism for Primordial Black Hole Formation in Spherical Symmetry* arXiv:1504.02071v1 [gr-qc] 8 Apr 2015
- [21] Juan Garcia-Bellido, Ester Ruiz Morales *Primordial black holes from single field models of inflation* arXiv:1702.03901v6 [astro-ph.CO] 29 Nov 2017
- [22] Yacine Ali-Haïmoud, Ely D. Kovetz and Marc Kamionkowski *The merger rate of primordial black-hole binaries* arXiv:1709.06576v2 [astro-ph.CO] 8 Jan 2018
- [23] Gianfranco Bertone, Dan Hooper, Joseph Silk *Particle dark matter: evidence, candidates and constraints* Physics Reports 405 (2005) 279–390 23 Aug 2005
- [24] Jeremy L Tinker, Andrey V Kravtsov, Anatoly Klypin, Kevork Abazajian, Michael S Warren, Gustavo Yepes, Stefan Gottlober, Daniel E Holz *Toward a halo mass function for precision cosmology: the limits of universality* arXiv:0803.2706 [astro-ph] 18 Mar 2008
- [25] A. Jenkins, C. S. Frenk, S. D. M. White, J. M. Colberg, S. Cole, A. E. Evrard, H. M. P. Couchman, N. Yoshida *Mass function of dark matter halos* arXiv:astro-ph/0005260 12 May 2000

# Ringraziamenti

Ora che sono giunto al termine del mio percorso universitario mi pare doveroso ringraziare tutti coloro che mi hanno accompagnato e che sono stati, più o meno direttamente, un importante sostegno in questa difficile impresa. Di conseguenza ringrazio infinitamente: il professor **R. Balbinot**, per aver accettato di essere il mio maestro, per la pazienza e per la sua competenza; i professori **L. Moscardini** ed **E. Ercolessi**, per il loro aiuto nel mio trasferimento ad Astrofisica; mio padre **Marco**, per avermi sempre guidato con pazienza e saggezza; mia madre **Antonella**, per il suo infinito affetto; mio fratello **Davide**, per avermi aperto la strada alla carriera di fisico e per avermi aiutato in tutti gli esami del primo anno; mio fratello **Simone**, per la stima che ha nei miei confronti; i miei nonni **Dino** e **Giusy**, per l'esempio che mi hanno sempre dato; i miei zii **Giorgio**, **Cristina**, **Alessandra** e **Cre**, per la fiducia che mi hanno sempre mostrato; mio cugino **Luca**, per essere l'allievo migliore che abbia mai avuto; don **Carlo**, padre **Marziano**, monsignor **Vincenzo** e don **Giuseppe**, per essere stati un riferimento fondamentale; **Maurizio** e **Laura**; per avermi accolto come un figlio; tutti i miei amici nigeriani che mi hanno sempre fatto festa la mattina presto per le vie di Bologna, in particolare **Matthew** a cui auguro di potersi rincongiungere a sua madre; il mio amico **Mike**, per essermi sempre accanto nei momenti più difficili; il mio amico **Mitch**, per la sua lealtà; il mio amico **Botte**, per essere stato un compagno di stanza formidabile; il mio amico **Fred**, per avermi fatto più compagnia di quanto possa immaginare; il mio amico **Dade**, per essere sempre pronto ad aiutare; il mio amico **Jack**, per essere il più simpatico svita-bulloni che abbia mai conosciuto; il mio amico **Mazzi**, per essere sempre disponibile a raggiungerci da Ravenna; il mio amico **Valli**, per le ventate di allegria che porta sempre con sè; la mia amica **Eleonora**, per avermi ridato fiducia tanti anni fa; la mia amica **Rachele**, per la sua capacità di trovare sempre spazio per chi è in difficoltà; la mia amica **Debby** per la sua amicizia d'oltremarica; la mia amica **Elisa**, per il modo in cui si carica quando meno te lo aspetti; la mia amica **Pimpa** per la sua travolgente simpatia; il mio amico **Pacio** per essere stato il peggior compagno di laboratorio che il mondo ricorderà e per essere stato il miglior compagno di corso che si potesse desiderare; il mio amico **Cecco**, per la sua sottovalutata saggezza; il mio amico **Melfi**, per le grandi discussioni di filosofia di fronte alle bruschette; il mio amico **Rigo**, per essermi stati vicino in molti momenti duri e per avermi sempre strappato una risata; il mio amico **Drake**, per le belle chiacchierate

e la buona musica; il mio amico **Livio**, per essere stato il coinquilino più esuberante ed intraprendente che abbia mai avuto; il mio amico **Flex**, per avermi sempre fatto mangiar bene; la mia amica **Olivia**, per la sua amicizia nonostante non sia mai d'accordo con me, però la nuova serie di Star Wars è orribile. Desidero inoltre ringraziare la mia fidanzata **Beatrice**, per il suo amore, la sua devozione, per la sua infinita pazienza e per il suo incredibile coraggio nel legarsi ad un matto scatenato. Infine devo ringraziare **Dio Padre**, per aver dato il senso ad ogni cosa.

Grazie a voi tutti.